Programme de khôlle 18

Semaine du 24 février 2025

La colle se déroulera en trois temps :

1. Prtaique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***symetrique(n,N)*** qui reçoit en argument deux entiers naturels non nuls et qui renvoie une matrice carrée symétrique de taille n dont les coefficients sont des entiers aléatoires compris entre 0 et N.
2. ***est_ortho(A)*** qui reçoit en argument une matrice A de type ***array*** et qui renvoie True s'il s'agit d'une matrice appartenant au groupe spécial orthogonal, False sinon.
   Indication : on pourra utiliser la commande ***np.array_equal***.
3. ***angle_rot(A)*** qui reçoit en argument une matrice $A \in SO(3)$ de type ***array*** et qui renvoie la valeur absolue de l'angle de la rotation canoniquement associée.

2 Pratique calculatoire

Déterminer les séries de Fourier (termes en sinus et cosinus) des fonctions suivantes :

1. f est $2\pi-$ périodique, définie par :
$$f(x) = x \text{ si } -\pi \leq x < \pi.$$
2. la fonction créneau : f est 2π-périodique, définie par :
$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, \pi[\text{ et } f(x) = -1 \text{ si } x \in [-\pi, 0[.$$
3. la fonction $L-$ périodique, où $L > 0$, définie par :
$$f(x) = |x| \text{ si } x \in [-L/2, L/2].$$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *On pose $f(t) = |\cos(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Dessiner le graphe de la fonction f sur $[-2\pi; 2\pi]$. Quelle est la plus petite période de f ?*
2. *Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.*
3. *La série de Fourier de f est-elle convergente ? Si oui, que vaut sa somme ?*
4. *En déduire les sommes des séries suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Exercice 3.2. *Soit f la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ sur $[0, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.*

1. *Tracer le graphe de la fonction f sur $[-3\pi; 3\pi]$.*
2. *Déterminer la série de Fourier de f.*
3. *f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?*
4. *Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.*

Exercice 3.3. *Soient $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par :*

$$f(t) = \cos(\alpha t) \text{ sur }]-\pi, \pi].$$

1. *Déterminer les coefficients de Fourier de f.*
2. *En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$*

Chap.13 : Séries de Fourier

1 Fonctions T-périodiques
1.1 Définition
1.2 Régularité
1.3 Intégration

2 Séries de Fourier
2.1 Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues
2.2 Coefficients de Fourier
2.2.1 Définition

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien