Chap.3 : Intégrales : rappels et généralisation

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des réels $\mathbb{R}$ soit le corps des complexes $\mathbb{C}$.

1 Rappels sur les intégrales d'une fonction continue sur un segment

1.1 Définition et lien avec les primitives

Définition 1.1. *a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a;b]$. On appelle* ***intégrale*** *de f sur le segment $[a;b]$ l'aire algébrique, exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre :*

- *la courbe*
- *l'axe des abscisses*
- *les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.*

On note ce nombre $\int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x$ ou $\int_{[a;b]} f$.

Définition 1.2. *a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
On appelle intégrale de f sur le segment $[a;b]$, et on note $\int_{[a;b]} f$ ou $\int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x$, le complexe :

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a;b]} \mathrm{Im}(f)$$

où $\mathrm{Re}(f)$ désigne la partie réelle de f et $\mathrm{Im}(f)$ sa partie imaginaire.

Pour toute la suite de cette partie, f désigne une fonction continue sur un intervalle I tel que a et b appartiennent à I, et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. **Attention** : on ne suppose plus $a < b$.

Définition 1.3. *On appelle* ***primitive*** *de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$*

Proposition 1.4. *Soit F une primitive de f. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{K}$.*

Proposition 1.5. *Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$*

Théorème 1.6. *Soit f une fonction continue sur I. Alors f admet au moins une primitive sur I.*

Définition 1.7. *On appelle intégrale entre a et b de f ou intégrale de a à b de f, et on note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ le réel ou complexe :*

- *Si $a < b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x$ (intégrale définie dans les définitions 1 et 2).*
- *Si $a > b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_{[b;a]} f(x)\mathrm{d}x$*
- *Si $a = b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.*

Proposition 1.8. *Soit f une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et F une primitive de f sur I. Alors :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Remarque 1.9. *La valeur de $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.*

1.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 1.10. ***Linéarité de l'intégrale***
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient λ et μ deux scalaires. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Théorème 1.11. ***Positivité de l'intégrale***
Si $a < b$ et si f est positive sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Proposition 1.12. *Si $a < b$ et si $\forall t \in [a;b] f(t) \leqslant g(t)$ alors :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.13. *Si $a < b$, alors : $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.*

Théorème 1.14. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, avec $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Si $f \geqslant 0$ et si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors :

$$\forall t \in [a;b], f(t) = 0.$$

Théorème 1.15. ***Relation de Chasles***
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a, b et c trois réels de cet intervalle. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 1.16. ***Théorème fondamental de l'analyse***
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors la fonction $F_a : I \to \mathbb{K}$ définie par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Remarque 1.17. *La fonction F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car sa dérivée est f qui est continue. On peut aussi remarquer que si f est de classe $\mathscr{C}^p$ alors F_a est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$.*

Application 1.18. *Soit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = \int_{x^2}^{x^3} cos(t^2)e^t \,\mathrm{d}t$$

Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.

1.3 Intégration par partie et changement de variable

Théorème 1.19. ***Intégration par partie***
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Preuve :

Application 1.20. *Déterminer les primitives de la fonction* $x \mapsto \ln(x)$ *sur l'intervalle* $I =]0; +\infty[$.

Application 1.21. *Calculer* $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\mathrm{d}x$.

Théorème 1.22. ***Formule de changement de variable pour une fonction continue***
Soient I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$*, soit* $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ *et soit* $f \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{K})$ *telle que* $\varphi(I) \subset J$*. Alors, on a*

$$\forall(\alpha, \beta) \in I^2, \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t$$

Preuve : Soit F une primitive de f sur J. On a $F \in \mathscr{C}^1(J, \mathbb{K})$, donc $F \circ \varphi \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$.
On en déduit que pour tous $(\alpha, \beta) \in I^2$:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(x)\mathrm{d}x = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)$$

On peut donc réécrire :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

Méthode 1.23. *Quand on réalise un changement de variable dans une intégrale, trois choses se transforment :*

- *l'expression à intégrer («intégrande»)*
- *les bornes de l'intégrale ;*
- *l'élément différentiel* $\mathrm{d}t$ *(ne pas l'oublier !).*

Application 1.24. *Calculer* $A = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ *avec le changement de variable* $t = \sin(x)$.

Application 1.25. *Calculer* $B = \int_0^1 \frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$ *avec le changement de variable* $t = e^x$.

Théorème 1.26. ***Formule de Taylor avec reste intégral***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$ *sur un intervalle* I. *Pour tout* $a, b \in I$ *:*

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

La somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$ *est appelée* ***développement de Taylor*** *à l'ordre* n.
Le terme $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ *est appelé* ***reste intégral****.*

Théorème 1.27. ***Inégalité de Taylor Lagrange***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$ *telle que pour tout* $x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M_{n+1}$*, où* M_{n+1} *est un réel. Alors pour tout* $a, b \in I$ *:*

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \frac{M_{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La démonstration découle directement de l'égalité de Taylor avec reste intégral.

Théorème 1.28. ***Formule de Taylor-Young***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^{n+1}$ *sur un intervalle* I *et* $a \in I$*. Au voisinage de* a *on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

1.4 Sommes de Riemann, théorème de la moyenne

On termine ce chapitre par un résultat important de convergence, qui dit que sous certaines conditions, on peut approcher l'intégrale sur $[a;b]$ d'une fonction f par des sommes d'aires de rectangles de largeur $\frac{b-a}{n}$ (avec n tendant vers l'infini).
Là encore, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 1.29. ***Convergence des sommes de Riemann.***
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{K})$*, et soit* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *une subdivision régulière de* $[a;b]$:

$$\forall i \in [\![0;n]\!], \quad a_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

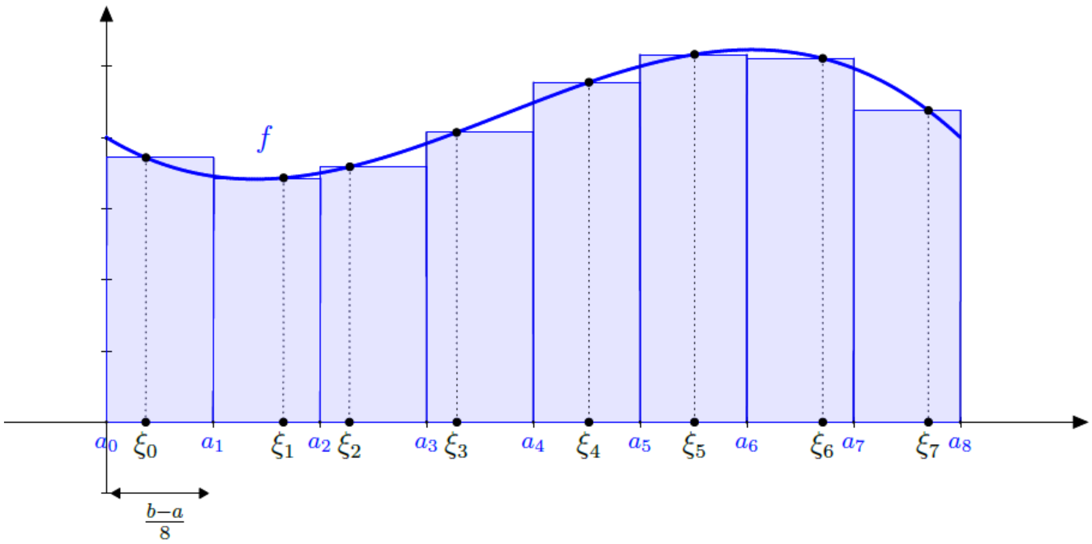
Pour chaque indice $i \in [\![0;n-1]\!]$*, on choisit un point* $\xi_i \in [a_i;a_{i+1}]$*. On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque 1.30. *Lorsque le pas* $h_n = \frac{b-a}{n}$ *devient petit, on a :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right) h_n \simeq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On comprend alors que l'intégrale est en quelque sorte une "somme continue", et le ´ dxˇ joue le rôle de "pas infinitésimal".



La somme de Riemann $\frac{b-a}{8}\sum_{i=0}^{7} f(\xi_i)$ *est la somme des aires coloriées (ici,* $n = 8$ *).*

En considérant les cas particuliers où l'on choisit $\xi_i = a_i$ (le bord gauche de chaque intervalle) ou encore $\xi_i = a_{i+1}$ (le bord droite), on obtient le résultat suivant :

Théorème 1.31. ***Méthodes des rectangles à gauche/à droite.***
Soit $f \in \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{K})$*. On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

mais aussi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 1.32. *Si* $f \in \mathscr{C}^0([0;1];\mathbb{K})$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

puisque $\left(\frac{i}{n}\right)_{0\leq i\leq n}$ *est une subdivision régulière du segment* $[0;1]$*.*

Application 1.33. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$.

Remarque 1.34. *Calcul approché d'intégrales*
*La fonction **quad** du module **scipy.integrate** permet de calculer des valeurs approchées d'intégrales.*
Elle renvoie une valeur approchée de l'intégrale ainsi qu'un majorant de l'erreur commise.
Cette fonction peut aussi s'employer avec des bornes d'intégration égales à $+\infty$ *ou* $-\infty$.

```
def f(x):
    return np.exp(-x)

>>> integr.quad(f, 0, 1)
(0.6321205588285578, 7.017947987503856e-15)

>>> integr.quad(f, 0, np.inf)
(1.0000000000000002, 5.842607038578007e-11)
```

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition 2.1. *Soit* f *une fonction définie sur* $[a;b]$ *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *On dit que la fonction* f *est une fonction **continue par morceaux** sur* $[a;b]$ *s'il existe* $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ *une **subdivision** de* $[a;b]$ *telle que :*

- *la restriction de* f *à chacun des intervalles* $]a_i; a_{i+1}[$ *est une fonction continue*
- f *admet une limite finie à gauche et à droite en chacun des* a_i.

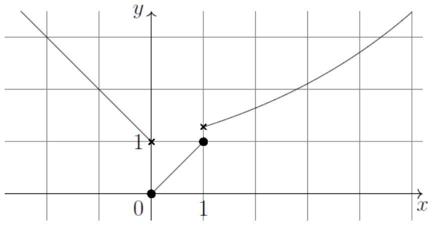
On dit alors que la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *est **adaptée** à* f.

Définition 2.2. *Soit* f *une fonction définie sur* I, *intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$, *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$. *On dit que la fonction* f *est **continue par***

morceaux *sur I la restriction de f à tout segment J contenu dans I est continue par morceaux sur J.*

Exemple 2.3. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ e^{x/4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



- *Sur $]-\infty;0[$, $f(x) = 1 - x$ donc f est continue sur $]-\infty;0[$;*
- *Sur $[0;1]$, $f(x) = x$ donc f est continue sur $]0;[1$;*
- *Sur $]1;+\infty\left[\right.$, $f(x) = e^{x/4}$ donc f est continue sur $]1;+\infty[$.*

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = e^{1/4}$.
Donc en 0 et 1, f n'est pas continue mais admet des limites finies à gauche et à droite. f est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

- *Les fonctions $f + g$ et $f - g$ sont continues par morceaux sur I.*
- *Pour tout scalaire λ, la fonction λf est continue par morceaux sur I.*
- *La fonction $f \times g$ est continue par morceaux sur I.*
- *Si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue par morceaux sur I.*
- *La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur I.*

On notera $\boldsymbol{\mathscr{C}_M(I)}$
l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I. D'après les deux premiers points de la propriété précédente, $\mathscr{C}_M(I)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 2.5. *Soit f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on note f_i la restriction de f à $]a_i;a_{i+1}[$ et $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f_i à $[a_i;a_{i+1}]$. On appelle intégrale sur $[a;b]$ de f, et on note $\int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x$, le scalaire :*

$$\int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i;a_{i+1}]} \tilde{f}_i(x)\mathrm{d}x$$

Définition 2.6. *Soit f est une fonction continue par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soient a et b deux éléments de I. On appelle intégrale entre a et b de f ou intégrale de a à b de f, et on note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ le réel ou complexe :*

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a;b]} f(x)\mathrm{d}x$ *si $a < b$;*
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_{[b;a]} f(x)\mathrm{d}x$ *si $a > b$;*
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ *si $a = b$*

Application 2.7. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ \mathrm{e}^{x/4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.*
Calculer $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$.

3 Extension de la notion d'intégrale

Le but de la suite de ce chapitre est de tenter de donner un sens à l'intégrale de a à b d'une fonction continue sur $]a;b]$ ou $[a;b[$ ou encore sur $]a;b[$, a et b pouvant être des réels ou égaux à $+\infty$ ou $-\infty$.

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

Définition 3.1. *Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.*
*On appelle intégrale généralisée ou **intégrale impropre** une intégrale du type $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, avec f une fonction continue sur $]a;b]$ ou $[a;b[$ ou encore $]a;b[$.*

Lorsque f est continue sur $[a;b]$, il n'y a aucun problème, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe.

3.1 Sur un intervalle du type $[a;b[$ ou $]a;b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Définition 3.2. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$.*
*On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente**, si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$*

admet une limite finie lorsque x tend vers $b(x \in [a;b[)$.
On pose alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

*Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est **divergente**. On définit de la même façon lorsque f est continue sur $]a;b]$:*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Lorsqu'on détermine si une intégrale est convergente ou divergente, on dit que l'on détermine la nature de l'intégrale.

Application 3.3. *Quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ dt ?*

Application 3.4. *Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}$ dt ?*

Théorème 3.5. *Le " faux problème".*
Soit f une fonction continue sur $[a;b[$ telle que f admet une limite finie en b (c'est-à-dire f est prolongeable par continuité en b).
Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
*On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **faussement impropre**.*

Application 3.6. *Montrer que l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Application 3.7. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

3.2 Sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$ avec $a \in \mathbb{R}$

Définition 3.8. *Soit* $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue . On dit que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *est* ***convergente****, si la fonction* $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand* x *tend vers* $+\infty$. *On pose alors :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

On définit de la même façon l'intégrale, lorsqu'elle existe, $\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$.

Application 3.9. *Quelle est la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ *?*

Application 3.10. *Quelle est la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$?

3.3 Sur un intervalle du type $]a;b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 3.11. *Soient* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f *une fonction continue sur* $]a;b\,[$. *On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est* ***convergente*** *lorsqu'il existe* $c \in]a;b\,[$ *tel que les intégrales* $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *sont convergentes, et, en cas de convergence, on pose :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 3.12. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* $]a;b[$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe* $c \in]a;b\,[$ *tel que les intégrales* $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *sont convergentes ;*
- *pour tout* $d \in]a;b\,[$, *les intégrales* $\int_a^d f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_d^b f(t)\mathrm{d}t$ *sont convergentes*

Remarque 3.13. *Cette définition et cette propriété signifient que pour étudier la nature de l'intégrale* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *lorsque est continue sur* $]a;b\,[$ *il suffit d'étudier la nature des intégrale* $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* ***le choix de la valeur de*** c ***n'a pas d'importance.***

Application 3.14. *Déterminer la nature de* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 3.15. *Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ et f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$ ou $]a;b]$ ou $]a;b[$.*

- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence :*

$$\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

- *Si les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont convergentes alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t$ est convergente et*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

- *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est divergente et l'intégrale $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ est convergente (ou l'inverse) alors l'intégrale $\int_a^b (f(t) + g(t))\mathrm{d}t$ est divergente.*
- *Si les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont divergentes alors **on ne peut rien dire** de la nature de l'intégrale $\int_a^b (f(t) + g(t))\mathrm{d}t$.*

Application 3.16. *Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut $\ln(3)$.*

Proposition 3.17. *Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ et f une fonction continue sur $[a;b[$ ou $]a;b]$ ou $]a;b[$ à valeurs complexes.*
Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$ sont convergentes et dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$$

Proposition 3.18. *Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ et f une fonction continue sur $I = [a;b[$ ou $]a;b]$ ou $]a;b[$.*
Si $\forall t \in I, f(t) \geqslant 0, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors :

$$\forall t \in I, f(t) = 0$$

3.4 Interprétation en termes d'aire sous la courbe

On peut définir l'aire de certains domaines non bornés.

Exemple 3.19. *Notons* $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ *et* $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$*. Puisque l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ *est convergente, on peut définir l'aire du domaine*

$$\Delta_2 = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\right\}.$$

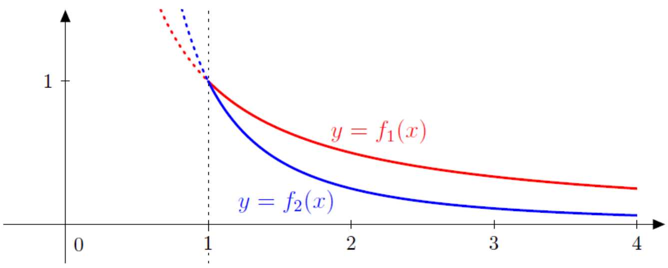
Cette aire est :

$$\mathscr{A}\left(\Delta_2\right) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = 1$$

En revanche, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ *est divergente, donc le domaine*

$$\Delta_1 = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$$

n'a pas une aire finie.



3.5 Intégration par parties et changement de variable

Il est **INTERDIT** de faire une intégration par partie sur une intégrale impropre. On se ramènera toujours à une intégrale sur un segment puis on passera à la limite une fois l'IPP effectuée.

Application 3.20. *Déterminer la nature et la valeur de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$*.*

Théorème 3.21. ***Théorème de changement de variable généralisé*** *Soit f une fonction continue sur $]a;b[$ et soit φ une fonction strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha;\beta[$ avec $a = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} \varphi(u)$*

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

On peut évidemment énoncer ce théorème avec φ strictement décroissante. On aura alors :$b = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} \varphi(u)$ et $a = \lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} \varphi(u)$ et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Méthode 3.22. *Ce théorème généralise le théorème de changement de variable sur les intégrales sur un segment. La méthode d'application est la même, il faudra juste penser à rajouter la vérification de la convergence des intégrales mises en jeu.*

Application 3.23. *Calculer $\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos(x)}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.*

4 Critères de convergence pour les fonctions positives

Pour l'instant, la seule méthode donc nous disposons pour déterminer la nature de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ nécessite la connaissance d'une primitive de f. Or, il n'est pas toujours possible de déterminer une telle primitive. Nous allons donc mettre en place différentes méthodes pour contourner le problème du calcul de la primitive.

4.1 Les intégrales de référence

Les résultats ci-dessous sont des résultats de cours qui seront donc utilisés sans avoir besoin de les redémontrer.

Dans les exercices, on utilise majoritairement les conditions de convergence des différentes intégrales mais assez peu leurs valeurs. La valeur des différentes intégrales n'est pas nécessairement à connaitre par cœur car on peut facilement les retrouver.

Théorème 4.1. ***Intégrales de Riemann***

- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *est convergente si, et seulement si,* $\alpha < 1$.
  Dans ce cas $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *est convergente si, et seulement si,* $\alpha > 1$.
  Dans ce cas $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$.

Preuve : Démontrons la première propriété.

Théorème 4.2.

- $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ *est une intégrale convergente et :*

$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$$

- *Pour tout* $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$ *est une intégrale convergente et :*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

Preuve :
Démontrons la première propriété :

Démontrons la deuxième propriété :

- La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0;+\infty[$. Le seul problème se trouve donc en $+\infty$.
- On pose $x \in [0;+\infty\,[$. On a $\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]_0^x = -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha}$
- $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, car $\alpha > 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

4.2 Une propriété utile

Proposition 4.3. *Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue sur $[a;b[$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente ;*
2. *Il existe $c \in [a;b\,[$ tel que $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente ;*
3. *Pour tout $c \in \left[a;b\right[, \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.*

Dans ce cas on a alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour "vulgariser", cette propriété signifie que lorsqu'on étudie la nature de l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ qui est impropre en b, la valeur que l'on met à la place de a n'a aucune importance (tant qu'on met une valeur qui ne pose pas de problème !).
On peut évidemment adapter cette propriété pour une intégrale impropre en a.

Remarque 4.4. *Si on applique cette propriété à nos intégrales de référence cela signifie que :*

- *pour tout $c > 0, \int_0^c \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ et $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$;*
- *pour tout $c > 0, \int_0^c \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente ;*
- *pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

4.3 Critères de convergence pour les fonctions positives

Dans toute cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que si $b \in \mathbb{R}, a < b$
f et g désignent deux fonctions **continues et positives** sur $[a; b[$.
Tous les résultats énoncés pourront être adaptés à des fonctions continues sur $]a; b]$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Inégalités

Théorème 4.5. ***Majoration par une fonction dont l'intégrale est convergente***
On suppose que :

- $\forall t \in [a; b[\,, 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$
- $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Théorème 4.6. ***Minoration par une fonction dont l'intégrale est divergente****. On suppose que :*

- $\forall t \in [a; b[\,, f(t) \geqslant g(t) \geqslant 0$
- $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *est divergente.*

Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est divergente.*

Application 4.7. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$.

Application 4.8. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2t+1}\, \mathrm{d}t$.

4.3.2 Équivalents

Théorème 4.9. *Si* $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$ *alors les intégrales* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

Application 4.10. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{t^2-5t+7}{(t+1)(4t^2-t+2)}\mathrm{d}t$.

4.4 Comparaison séries-intégrales

On remarque une forte analogie entre l'étude de la convergence des séries numériques et celle des intégrales impropres en $+\infty$:

- pour une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$, on dit que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ existe ;
- pour une fonction continue $f : [a;+\infty[\to \mathbb{K}$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)\mathrm{d}t$ existe.

On a en fait un lien entre la convergence des séries et des intégrales impropres. Le résultat suivant est fondamental, et surtout sa démonstration :

Théorème 4.11. ***Théorème de comparaison séries-intégrales***
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si $f : [n_0;+\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction :*

- *continue sur* $[n_0; +\infty[$ *;*
- *positive ;*
- *décroissante sur* $[n_0; +\infty[$

Alors la série $\sum\limits_{n \geq n_0} f(n)$ *et l'intégrale* $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

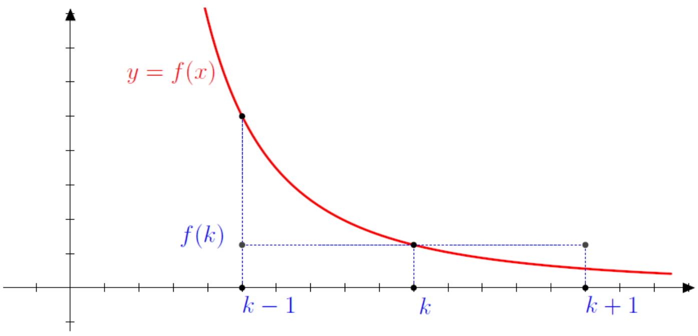
Preuve :

Idée essentielle : la monotonie de f permet de comparer facilement les sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et les intégrales $F(n) = \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

On commence par faire la comparaison sur des intervalles de largeur 1 : pour tout entier $k \geq n_0 + 1$, la fonction f est décroissante sur les intervalles $[k-1; k]$ et $[k; k+1]$, donc :

$$\forall k \geq n_0 + 1, \quad \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

(et l'inégalité de gauche reste vraie pour $k = n_0$).



- En sommant l'inégalité de gauche de $k = n_0$ à n, on obtient

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k),$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles) :

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

On a donc $F(n+1) \leq S_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

- En sommant l'inégalité de droite de $k = n_0 + 1$ à n, on obtient

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$

c'est-à-dire (par la relation de Chasles) :

$$\forall n \geq n_0+1, \quad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

On a donc $S_n - f(n_0) \leq F(n)$ pour tout entier $n \geq n_0+1$, et cette inégalité reste vraie pour $n = n_0$ puisque $S_{n_0} - f(n_0) = 0 = F(n_0)$.

Finalement, on a donc l'encadrement :

$$\forall n \geq n_0, \quad F(n+1) \leq S_n \leq f(n_0) + F(n).$$

Montrons alors l'équivalence voulue :

Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction $F : x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite réelle lorsque $x \to +\infty$, donc elle est majorée par un réel M_1. On en déduit d'après l'encadrement précédent :

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n \leq f(n_0) + F(n) \leq f(n_0) + M_1.$$

Ceci montre que la suite (S_n) est majorée, mais elle est aussi croissante (car la série $\sum f(n)$ est à termes positifs), donc elle converge.
Ainsi, la série $\sum f(n)$ est convergente.

Remarque 4.12.

- *Ce théorème fournit une démonstration très simple de la condition de convergence des séries de Riemann.*
- *Ce théorème fait donc un lien entre les séries et les intégrales. Dans une grande majorité des cas on se sert de ce théorème pour déterminer la nature d'une série.*
- ***ATTENTION !*** *Ce théorème dit que sous certaines conditions, la série numérique $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, mais il ne dit pas que $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$, cette égalité est fausse en général !*
  Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ alors que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = 1$.

Méthode 4.13. *En plus du résultat de convergence, la technique de comparaison série-intégrale est souvent utile pour encadrer finement des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ de séries (convergentes ou divergentes).*

Il faut donc être capable d'adapter la démonstration du théorème aux différents exemples, d'où la nécessité de bien la maitriser.

Application 4.14. *Sommes partielles de la série harmonique.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Déterminer un encadrement de H_n, puis en déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ln(n)$.

Application 4.15. *Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{3/2}$.*

5 Fonctions intégrables

Dans la partie précédente les outils que nous avons détaillés ne fonctionnent que pour les fonctions positives. Dans cette partie, nous allons voir comment nous ramener à une intégrale de fonction positive. Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (quelconque) et f désigne une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Définition et application

Définition 5.1. *On dit que f est **intégrable** sur I si, et seulement si, l'intégrale $\int_{inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.*

Remarque 5.2.
- *On peut faire le parallèle entre cette définition et la notion de série absolument convergente. On parle d'ailleurs parfois d'intégrale absolument convergente.*

- *Toutes les fonctions continues sur un segment* $[a;b]$ *sont intégrables sur* $[a;b]$.

Théorème 5.3. *Si* f *est une fonction intégrable sur* I *alors l'intégrale* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*
Autrement dit, si l'intégrale $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)|\mathrm{d}t$ *est convergente alors l'intégrale* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*

Remarque 5.4. *La réciproque est en général fausse. Les intégrales telles que* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente et* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} \mid f(t) \mid dt$ *est divergente s'appellent des intégrales* ***semi-convergentes***.

Définition 5.5. *Soit* f *une fonction intégrable sur* I. *On appelle intégrale de* f *sur* I *et on note* $\int_I f$ *ou* $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ *la valeur de l'intégrale* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$.

Méthode 5.6. *Lorsque* f *est une fonction à valeurs complexes ou de signe non constant, ce théorème permet de se ramener à l'étude de la convergence d'une intégrale de fonction positive.*
ATTENTION ! *ce théorème ne permet pas toujours de déterminer la nature de* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ *car si* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)|\mathrm{d}t$ *est divergente on ne peut pas conclure sur la nature de* $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$

Application 5.7. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+\mathrm{i})\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

Application 5.8. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Méthode 5.9. *L'intégration par partie est un bon outil pour déterminer la nature d'une intégrale pour laquelle l'étude de la convergence absolue a échoué.*

Application 5.10. *Déterminer la nature de* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

5.2 Propriétés

Proposition 5.11. *Si f est une fonction continue et intégrable sur I alors f est intégrable sur tout intervalle $J \subset I$*

Proposition 5.12. *f est intégrable sur I si, et seulement si, f est intégrable sur l'intérieur de I (intervalle obtenu en ôtant les bornes de I).*

Proposition 5.13. *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.*

Cela signifie que toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est une fonction intégrable.

Proposition 5.14. *Soient f et g deux fonctions continues et intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Si, pour tout $t \in I, f(t) \leqslant g(t)$ alors :

$$\int_I f(t) \leqslant \int_I g(t)\mathrm{d}$$

Proposition 5.15. *Soit f une fonction continue et intégrable sur I. Alors :*

$$|\int_I f(t)\mathrm{d}t| \leqslant \int_I |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Proposition 5.16. *Soit f une fonction continue et intégrable sur I Alors :*

$\int_I |f| = 0$ *si, et seulement si, f est la fonction nulle.*