

Programme de khôlle 18

Semaine du 5 février 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Déterminer les séries de Fourier (termes en sinus et cosinus) des fonctions suivantes :

1. f est 2π -périodique, définie par :

$$f(x) = x \text{ si } -\pi \leq x < \pi.$$

2. la fonction créneau : f est 2π -périodique, définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [0, \pi[\text{ et } f(x) = -1 \text{ si } x \in [-\pi, 0[.$$

3. la fonction L -périodique, où $L > 0$, définie par :

$$f(x) = |x| \text{ si } x \in [-L/2, L/2].$$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. On pose $f(t) = |\cos(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Dessiner le graphe de la fonction f sur $[-2\pi; 2\pi]$. Quelle est la plus petite période de f ?
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
3. La série de Fourier de f est-elle convergente ? Si oui, que vaut sa somme ?
4. En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Exercice 2.2. Soit f la fonction 2π -périodique, impaire, définie par $f(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ sur $[0, \pi[$ et $f(\pi) = 0$.

1. Tracer le graphe de la fonction f sur $[-3\pi; 3\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f .
3. f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 2.3. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par :

$$f(t) = \cos(\alpha t) \text{ sur }]-\pi, \pi].$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f .
2. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-\alpha^2)^2}$

Chap.13 : Séries de Fourier

1 Fonctions T-périodiques

- 1.1 Définition
- 1.2 Régularité
- 1.3 Intégration

2 Séries de Fourier

- 2.1 Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues
- 2.2 Coefficients de Fourier
 - 2.2.1 Définition
 - 2.2.2 Cas particuliers
- 2.3 Série de Fourier

3 Les théorèmes de convergence

- 3.1 Théorème de Dirichlet
- 3.2 Théorème de Parseval

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

1 Isométries

- 1.1 Groupe orthogonal
- 1.2 Symétrie orthogonale
- 1.3 Matrices orthogonales
- 1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

- 2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3
 - 2.1 Orientation d'un espace vectoriel
 - 2.2 En dimension 2