Devoir-Maison 1 - CORRECTION

Exercice 0.1. *On travaille dans un repère orthonormé direct* $(O; \vec{i}, \vec{j}$.

1. *On considère l'ensemble* $\mathscr{E}$ *des point* $M(x;y)$ *vérifiant l'équation :*
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 29 = 0$$
Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ *? Préciser ses caractéristiques.*
$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 29 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1^1 + (y-2)^2 - 2^2 - 29 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 34$
Il s'agit du cercle de centre $C(-1;2)$ *et de rayon* $\sqrt{34}$.
2. *Le point* $A(2;7)$ *appartient-il à l'ensemble* $\mathscr{E}$ *?*
$A(2;7) \in \mathscr{E} \Leftrightarrow (2+1)^2 + (7-2)^2 = 34 \Leftrightarrow 9 + 25 = 34$
Cela est vrai donc $A \in \mathscr{E}$.
3. *On nomme* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* $C(-1;2)$ *et de rayon* $R = \sqrt{34}$.
Donner l'équation de la tangente (T) *au cercle* $\mathscr{C}$ *en* A.
La tangente recherchée est la droite passant par A *et perpendiculaire à la droite* (CA). $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-7 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ *donc :*
$M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow -3(x-2) - 5(y-7) = 0 \Leftrightarrow -3x - 5y + 41 = 0$
D'où : $(T) : -3x - 5y + 41 = 0$
4. *Soit la droite* $\mathscr{D}$ *d'équation cartésienne :* $-2x + 3y - 4 = 0$.
   (a) *Calculer la distance du point* C *à la droite* $\mathscr{D}$.
   $d(C, \mathscr{D}) = \frac{|-2x_C + 3y_C - 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{|-2\times(-1) + 3\times 2 - 4|}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13} u.l.$
   (b) *En déduire la position relative de la droite et du cercle, puis déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection.*
   On compare $d(C, \mathscr{D})$ *avec le rayon du cercle :*
   $$\frac{4\sqrt{13}}{13} < \sqrt{34} \Leftrightarrow 4 < \sqrt{34} \times \sqrt{13} \Leftrightarrow 16 < 34 \times 13$$
   Cela est vrai donc $d(C, \mathscr{D}) < R$ *donc la droite* $\mathscr{D}$ *est sécante au cercle en deux points* I_1 *et* I_2. *Déterminons leurs coordonnées.*

$$I(x;y) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 29 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 2 \\ (\frac{3}{2}y - 2)^2 + y^2 + 2(\frac{3}{2}y - 2) - 4y - 29 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 2 \\ \frac{13}{4}y^2 - 7y - 29 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation du second degré : $\Delta = 49 - 4 \times \frac{13}{4} \times (-29) = 426 > 0$. *Il existe donc deux solutions réelles :*

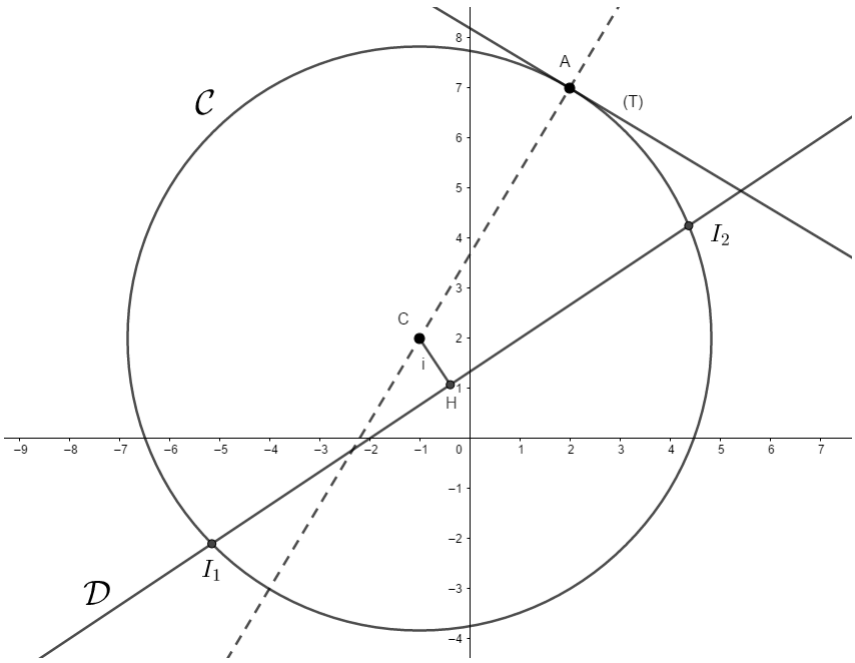
$$y_1 = \frac{7-\sqrt{426}}{2\times\frac{13}{4}} = \frac{14-2\sqrt{426+}}{13} \text{ et } y_2 = \frac{7+\sqrt{426}}{2\times\frac{13}{4}} = \frac{14+2\sqrt{426}}{13}$$

Si $y = \frac{14-2\sqrt{426}}{13}$ *alors* $x = \frac{3}{2}y - 2 = \frac{3}{2} \times \frac{14-2\sqrt{426}}{13} - 2 = \frac{-5-3\sqrt{426}}{13}$.
Si $y = \frac{14+2\sqrt{426}}{13}$ *alors* $x = \frac{3}{2}y - 2 = \frac{3}{2} \times \frac{14+2\sqrt{426}}{13} - 2 = \frac{-5+3\sqrt{426}}{13}$.
D'où $I_1(\frac{-5-3\sqrt{426}}{13}; \frac{14-2\sqrt{426}}{13})$ *et* $I_2(\frac{-5+3\sqrt{426}}{13}; \frac{14+2\sqrt{426}}{13})$

5. *Soit* H, *le projeté orthogonal du point* C *sur la droite* $\mathscr{D}$. *Déterminer les coordonnées de* H *puis vérifier la réponse de la question 4.a).*
Soit $H(x; y)$. *On sait que les coordonnées de* H *vérifient l'équation cartésienne de* $\mathscr{D}$ *et que* $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ *si* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ *est un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$. *D'où :*

$$\begin{cases} -2x + 3y - 4 = 0 \\ -3(x+1) - 2(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 2 \\ -3(\frac{3}{2}y - 2) - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 2 \\ -3(\frac{3}{2}y - 2) - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \times \frac{14}{13} - 2 = \frac{-5}{13} \\ y = \frac{14}{13} \end{cases} \quad \text{D'où } H(\frac{-5}{13}; \frac{14}{13}).$$

On vérifie ensuite que $CH = \|\overrightarrow{CH}\| = d(C, \mathscr{D}) = \frac{4\sqrt{13}}{13}$.