Devoir Surveillé 1 - CORRECTION

Durée : 1 heure

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *Déterminer l'inverse, si elle existe, de la matrice $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En utilisant le pivot de Gauss sur la matrice augmentée, on obtient un rang égal à 3.
La matrice est donc inversible et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 0.2. *1. Montrer que l'ensemble*

$$F = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+t = y+z+t = 0\Big\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base de F.

1. On vérifie les points de la définition :
   - On a $F \subset \mathbb{R}^3$ par définition de F.
   - Le vecteur $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ car $0+0+0 = 0+0+0 = 0$.
   - Soient $u = (x,y,z,t) \in F, u' = (x',y',z',t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On a :

     $$u + \lambda u' = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z', t+\lambda t')$$

     et

     $$(x+\lambda x') + (y+\lambda y') + (t+\lambda t') = (x+y+z) + \lambda\left(x'+y'+z'\right) = 0 + \lambda \times 0 = 0,$$
     $$(y+\lambda y') + (z+\lambda z') + (t+\lambda t') = (x+y+z) + \lambda\left(x'+y'+z'\right) = 0 + \lambda \times 0 = 0,$$

   donc $u + \lambda u' \in F$.
2. $(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \Big\{ \ x = -y - ty = -z - t \ \Leftrightarrow \Big\{ \ x = z + t - t = zy = -z - t \ \Leftrightarrow$
   $(x,y,z,t) = z(1,-1,1,0) + t(0,-1,0,1)$

Les deux vecteurs $(1,-1,1,0)$ et $(0,-1,0,1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre de F, qui génère F. C'est donc une base de F.

Exercice 0.3. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par*

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z).$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer une base de* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* de $\mathrm{Im}(f)$.

1. Soient $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, u'=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} & f(u+\lambda u') = f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ & = ((x+\lambda x') + (y+\lambda y') + (z+\lambda z'), (x+\lambda x') - (y+\lambda y') - (z+\lambda z')) \\ & = (x+y+z, x-y-z) + \lambda(x'+y'+z', x'-y'-z') \\ & = f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z') = f(u) + \lambda f(u'). \end{aligned}$$

On conclut f est une application linéaire.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=-z \\ z=z \end{array} \right. \end{aligned} \tag{1}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(0,1,-1)$.
Pour finir, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) & = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) \\ & = \mathrm{Vect}((1,1),(1,-1),(1,-1)) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Exercice 0.4. *Déterminer la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *de l'endomorphisme* $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ *défini par* $u(P) = P'$.

Avec la définition,après calcul de $u(1), u(X), u(X^2)$ et $u(X^3)$ on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car, par exemple : $u(X) = 1$, $u(X^2) = 2X$...

Exercice 0.5. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.*
2. *Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I_2 et A.*
3. *Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.*
   En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Après calculs, on obtient :*

$$A^2 = 5A - 6I_2$$

2. *Puisque $A\,(5I_2 - A) = 6I_2$, on a :*

$$A \times \frac{1}{6}\,(5I_2 - A) = \frac{1}{6}\,(5I_2 - A) \times A = I_2$$

   Cela prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{6}\,(5I_2 - A)$.

3. *Soit $n \geq 2$. Notons Q le quotient et R le reste du polynôme X^n dans la division euclidienne par P. Puisque $\deg(P) = 2$, on a*

$$X^n = PQ + R, \quad \deg(R) \leq 1.$$

   Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $R = aX + b$. D'où l'égalité polynomiale :

$$X^n = P(X)Q(X) + aX + b = (X-2)(X-3)Q(X) + aX + b.$$

   En évaluant successivement en $X = 2$ et $X = 3$, on obtient $\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ 3a + b = 3^n \end{cases}$ *,*
   d'où $a = 3^n - 2^n$ et $b = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.

   Finalement, en calculant le polynôme en la matrice A, on obtient :

   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P(A)Q(A) + aA + bI_2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} + aA + bI_2 = (3^n - 2^n)\,A + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)\,I_2$