

Exercices

Chap.3 : Déterminants

1 Propriétés générales

Exercice 1.1. Soit n un entier non nul impair et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. 1. Exprimer de deux façons $\det(A^T)$ en fonction de $\det(A)$. 2. Que peut-on dire de la valeur de $\det(A)$? 3. Et si n est pair ?

Exercice 1.2. On considère deux matrices inversibles A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = 0$.

1. Montrer que n est un entier pair.
2. Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A .

Exercice 1.3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice B de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A .

2 Calculs de déterminants

Exercice 2.1. On souhaite calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

1. Effectuer sur D l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.
2. Effectuer sur D les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$.
3. À l'aide d'échanges de lignes et de colonnes, montrer que :

$$D = (a + b + c) \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ b - a & -b & 0 & 0 \\ b - a & c - b & -c & 0 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Conclure sur la valeur de D .

Exercice 2.2. Calculer les déterminants suivants :

$$1. D_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$2. D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$3. D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2.3. Résoudre l'équation : $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix} = 0$

Indication : utiliser les opérations sur les lignes et les colonnes pour «faire sortir» des facteurs du type $ax + b$.

Exercice 2.4. Soient a, b et c trois réels distincts. On pose, pour tout réel

$$x, f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ b-x & c-x & a-x \\ b-x & b-x & c-x \end{vmatrix}$$

1. (a) À l'aide de deux opérations sur les lignes montrer que

$$f(x) = \begin{vmatrix} c-x & a-x & a-x \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

où d, e, f, g, h et k ne dépendent pas de x .

- (b) Sans calculer explicitement le déterminant, expliquer pourquoi $f(x)$ est de la forme $mx + p$ avec m et p deux réels indépendants de x .

2. (a) Calculer $f(a)$ et $f(b)$.

(b) En déduire les valeurs de m et p en fonction de a, b et c .

3. Grâce aux calculs précédents, calculer très rapidement $\begin{vmatrix} c & a & a \\ b & c & a \\ b & b & c \end{vmatrix}$.

4. En s'inspirant de la méthode détaillée ci-dessus, calculer $\begin{vmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{vmatrix}$

(déterminant d'ordre n)

Exercice 2.5. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \geq 2$ calculer le déterminant d'ordre

n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Indication : on pourra commencer par ajouter à la première colonne toutes les autres colonnes.

Exercice 2.6. On considère les 3 polynômes suivants :

$$Q_0 = X - i \quad Q_1 = X + i \quad Q_2 = X^2 - iX$$

On considère de plus la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$: $\mathcal{B}_c = (P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
2. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(P_0, P_1, P_2)$.

Exercice 2.7. On considère $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$
2. On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det_{\mathcal{B}}(M_1, M_2, M_3)$.
3. La famille (M_1, M_2, M_3) est-elle une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$?

3 Déterminant d'endomorphisme

Exercice 3.1. Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = XP' + P(1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(u)$.
3. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

4 Pour aller plus loin

Exercice 4.1. Le déterminant de **Vandermonde** de $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Quelle est la valeur de ce déterminant s'il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$?
2. On suppose maintenant que les a_i sont deux à deux distincts. Pour tout x réel, on pose :

$$P(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, x).$$

- (a) Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
 - (b) Quelles sont les racines du polynôme P ?
 - (c) Quel est le coefficient du terme de plus haut degré dans le polynôme P ?
 - (d) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \times \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$.
3. Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.