Les suites
DM 8 - CORRECTION

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left]0; \frac{1}{2}\right[$
   La fonction polynomiale $P(x) = x^3 - 3x + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $P'(x) = 3x^2 - 3$, qui est strictement négative sur $]-1, +1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $]-1, +1[$.
   On sait que :
   - $P(0) = 1 > 0$ et $P(1/2) = -3/8 < 0$
   - P est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ comme fonction polynomiale
   - P est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

   Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation

   $$x^3 - 3x + 1 = 0$$

   et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
   Comme $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $]0, 1/2[$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
   Comme $f'(x) = (x^2 + 2)/3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $f(0) = 1/9$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que

   $$f(\mathbb{R}^+) = [1/9, +\infty[.$$

   Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: "$x_{n+1} > x_n$" pour $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0 = x_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$

l'est aussi.
On sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que $x_{n+1} > x_n$ donc $f(x_{n+1}) > f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+2} > x_{n+1}$. Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On sait que $\mathscr{P}_0$ est vraie et que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc, par principe de récurrence, on en déduit par principe de récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(x_n) est donc croissante.

4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que :

$$0 \leq x_n < 1/2 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8\times 9} + \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{33}{72}$ donc $f(1/2) < 1/2$.
Soit la propriété $\mathscr{P}_n$: "$0 \leq x_n < 1/2$" pour $n \in \mathbb{N}$.
On sait que $x_0 = 0in \left[0; \frac{1}{2}\right[$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
On sait que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et que $0 \leq x_n < \frac{1}{2}$ donc $f(0) < f(x_n) < f(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow \frac{1}{9} < f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$. Ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
On sait que $\mathscr{P}_0$ est vraie et que $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc, par principe de récurrence, on en déduit que

$$0 \leq x_n < \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(x_n) est donc croissante. Comme $0 = x_0 < 1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.
D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée, donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un nombre réel $l \in]0, 1/2]$..
De plus comme $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par continuité de f que $\ell = f(\ell)$.
Comme $f(1/2) < 1/2$, On en déduit que $\ell \in]0, 1/2[$ et vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, on en déduit que $\ell = \alpha$ et donc que (x_n) converge vers α.