

Pratique calculatoire 1

Un calcul, c'est un enchaînement d'égalités, on les présente :

1. les unes sous les autres ou les uns après les autres
2. les barres de fractions au niveau du symbole d'égalité
3. sans hésiter à détailler les calculs quitte à ajouter des lignes
4. en prenant bien soin de développer les expressions sans faire d'erreur de signe
5. en simplifiant tous les produits et quotients dès que possible afin d'éviter des calculs trop complexes

1 Écritures fractionnaires

Exercice 1.1. Calculer :

$$1. A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7}$$

$$2. B = \frac{7}{8} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{14}$$

$$3. C = 3 \times \frac{9}{2}$$

$$4. D = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2011}{2012}$$

$$5. E = \frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$$

$$6. F = 3 \div \frac{9}{2}$$

$$7. G = \frac{9}{2} \div 3$$

$$8. H = \frac{3 - \frac{5}{7} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}}$$

$$9. I = \frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$$

$$10. J = \frac{3}{1 - \frac{2}{4 + \frac{3}{4 - \frac{1}{2}}}}$$

$$11. K = \frac{1}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{3}{5}}}}$$

2 Puissances

Propriété 2.1. Pour tous nombres réels a et b non nuls et pour tous nombres entiers relatifs m et n , on a :

$$- a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$- a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$- \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$- \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$- (a^m)^n = a^{mn}$$

Exercice 2.2. Simplifier les écritures suivantes :

$$1. A = \frac{8^{73} \times 3^{-31}}{9^{15} \times 2^{220}}$$

$$2. B = \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2$$

$$3. C = \frac{(3^5 \times 2^{-2})^2}{(9^{-1} \times 2^3)^3}$$

$$4. D = \left(\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 \div \frac{10^2 \times 2}{5^8}$$

Exercice 2.3. Que pensez-vous de l'égalité suivante :

$$12^{100} \times (1,5)^{50} \times 6^{-149} = 6 ?$$

Exercice 2.4. Déterminer deux entiers relatifs p et q tels que :

$$2^p \times 5^q = \frac{1}{125000}$$

3 Radicaux

Propriété 3.1. Soit a un nombre réel positif, \sqrt{a} est l'unique nombre réel positif dont le carré vaut a .

On a :

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} & 4. \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \\ 2. \sqrt{a^2} = a & \\ 3. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \end{array}$$

Exercice 3.2. Simplifier les écritures de :

$$\begin{array}{ll} 1. A = \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{\sqrt{50}}{4} - \sqrt{\frac{576}{18}} & 3. C = \frac{\sqrt{8,1 \times 10^5}}{\sqrt{5 \times 10^3} \times \sqrt{45 \times 10^6}} \\ 2. B = \sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{2} & 4. \sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^4 + 4^{11}}} \end{array}$$

Exercice 3.3. Mettre sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers :

$$\begin{array}{ll} 1. A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125} & 3. C = (2\sqrt{2} - 5)(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \\ 2. B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8} & 4. C = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{array}$$

4 Identités remarquables

Propriété 4.1. Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{array}{ll} - (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab & - (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \\ - (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab & \end{array}$$

Exercice 4.2. Soient x et y deux nombres réels. Démontrer les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) \\ 2. (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy \\ 3. x^4 + 4y^4 = ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2) \\ 4. x^3 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2) \\ 5. x^4 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3) \\ 6. x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{array}$$

Exercice 4.3. Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2$

3. $\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{5}\right)^2$

2. $\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^2$

Exercice 4.4. Soit $\varphi = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$.

1. Calculer φ^2 et vérifier que $\varphi^2 = 3\varphi + 7$

2. En déduire les égalités :

(a) $\varphi^3 = 16\varphi + 21$

(b) $\varphi^4 = 69\varphi + 112$

(c) $\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 3}{7}$