TSI2

Stage pré-rentrée
Fiche 1
Les espaces vectoriels

Exercice 1
Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels ?
1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y=0\}$
2. $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$
3. $E_1=\{P\in\mathbb{R}[X] / P(0)=P(2)\}$
4. $E_2=\{P\in\mathbb{R}[X] / P'(0)=2\}$

Exercice 2
Montrer que les ensembles suivants , munis des opérations classiques , sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels
1. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
2. L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
3. L'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$
4. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n\in\mathbb{N}$ fixé)

Exercice 3
Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x+y-z=0\}$ et $G=\{(a-b, a+b, a-3b) / a, b\in\mathbb{R}\}$
1. Montrer que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer $F\cap G$

Exercice 4
Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas , déterminer une relation linéaire liant ces vecteurs.
1. (v_1, v_2) avec $v_1=(1,0,1)$ et $v_2=(1,2,2)$
2. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,0)$ et $v_3=(1,1,1)$
3. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,1,-1)$ et $v_3=(1,-1,-2)$
4. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(1,0,1)$ et $v_3=(3,2,5)$

Exercice 5
Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base
1. $F_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / 3x-y+t=0\}$
2. $F_2=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+2z+t=1\}$
3. $F_3=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x+t=0 \; et \; 2x+y-z=0\}$
4. $F_4=\{(3a+b, a-b, a+5b, 2a+b) / (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

Exercice 6
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$u_1=(-3,1,0,2)$, $u_2=(-5,2,1,2)$, $u_3=(1,1,4,-6)$ et $u_4=(-1,0,-1,2)$
1. Montrer que Vec (u_1, u_2) = Vec (u_3, u_4)
2. Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants . Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$u=(1,0,1,0)$, $v=(0,1,-1,0)$, $w=(1,1,1,1)$, $x=(0,0,1,0)$ et $y=(1,1,0,-1)$

Soient F = Vec (u,v,w) et G = Vec (x,y) .

Quelles sont les dimensions de F , G , F+G et $F\cap G$?

Exercice 8

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les 5 vecteurs suivants :

$v_1=(1,0,0,1)$, $v_2=(0,0,1,0)$, $v_3=(0,1,0,0)$, $v_4=(0,0,0,1)$ et $v_5=(0,1,0,1)$

Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

1. Vec $(v_{1,}v_2)$ et Vec (v_3) ?
2. Vec $(v_{1,}v_2)$ et Vec $(v_{4,}v_5)$?
3. Vec $(v_{1,}v_{3,}v_4)$ et Vec $(v_{2,}v_5)$?
4. Vec $(v_{1,}v_4)$ et Vec $(v_{3,}v_5)$