Devoir-Maison 10

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que :
$$\mathscr{F} = \{X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)\}$$
est un base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de 1 dans cette base.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.
   (a) Montrer que pour tout réel a, F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer sa dimension.
   (b) Déterminer une base de $F_1 \cap F_{-1}$.
   (c) Montrer que $F_0 = \text{Vect}(\{X(X-1), X(X+1)\})$.
   (d) Montrer que $F_0 \oplus H = \mathbb{R}_2[X]$ avec $H = F_1 \cap F_{-1}$.