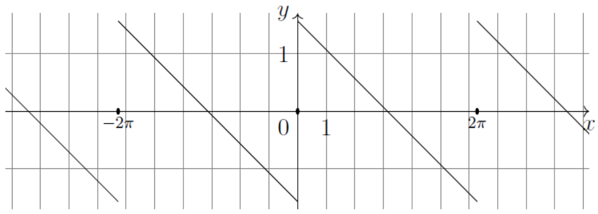
Interrogation 3 - CORRECTION

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2} & \text{si } t \in]0; 2\pi[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction f.



2. Justifier que f est une fonction impaire.
   Il suffit de montrer que f est impaire sur $[-\pi; \pi]$. $\forall x \in [-\pi; \pi]$, on a $-x \in [-\pi; \pi]$.
   De plus si $x \in]0; \pi\Big[, f(-x) = f(2\pi - x) = \frac{\pi-(2\pi-x)}{2} = \frac{-\pi+x}{2} = -f(x)$.
   Et $f(-0) = 0 = -f(0)$ f est bien une fonction impaire.
3. Justifier que f est égale à série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
   Comme f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, d'après le théorème de Dirichlet pour tout réel t la série de Fourier de f en t converge et vaut $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}$.
   Or si $t \neq 2k\pi$, f est continue en t donc $\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2} = f(t)$.
   Et si $t = 2k\pi$, $f(t) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)+f(t-h)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$.
   Donc pour tout réel t la série de Fourier de f converge et vaut $f(t)$.
4. Déterminer la série de Fourier de f.
   La fonction f est 2π-périodique et impaire. On a ici $T = 2\pi$ et $\omega = 1$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n(f) = 0$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

     $$b_n(f) = \frac{4}{2\pi} \int_0^{2\pi/2} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(nt) \mathrm{d}t$$

     On réalise une IPP avec les fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ définies par :

     $$\begin{array}{ll} u(t) = \frac{\pi-t}{2} & u'(t) = -\frac{1}{2} \\ v'(t) = \sin(nt) & v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi-t}{2}\times\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2n}\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left(0+\frac{\pi}{2}\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est : $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin(nt)$.

5. En déduire la convergence et la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

- On peut appliquer le fait que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t = 1$. On obtient :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi-1}{2}$$
Donc $\sum\frac{\sin(n)}{n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.

- On peut appliquer le fait que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t = \frac{\pi}{2}$.
On remarque alors que $\sin(n\pi/2) = 0$ lorsque n est paire et $\sin((2p+1)\pi/2) = (-1)^p$. On a donc :
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = f(\pi/2) = \frac{\pi}{4}$$
Donc $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.