Exercices
Chap.2 : Intégrales, rappels et généralisation

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Exercice 1.1. *Uniquement à l'aide du tableau des primitives donné dans le formulaire scientifique interdisciplinaire, calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_2^3 \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$
3. $\int_{-1}^1 |x^2-x|\,\mathrm{d}x$

Exercice 1.2. *À l'aide du théorème d'intégration par partie, et du tableau des primitives usuelles, calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\mathrm{d}x$
2. $\int_1^3 x^3\ln(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{1/2} \arcsin(x)\mathrm{d}x$

Exercice 1.3. *À l'aide des changements de variable indiqués, calculer les intégrales données.*

1. $\int_0^1 \frac{x}{2x+1}\,\mathrm{d}x$, *en posant* $t=2x+1$.
2. $\int_0^1 \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, *en posant* $t=x+\sqrt{x^2+1}$.
3. $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1+x)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x$, *en posant* $u=\frac{x}{x+1}$.

Exercice 1.4. *En utilisant judicieusement, soit les primitives des fonctions de la forme* $\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$*, soit la décomposition en élément simple d'une fraction rationnelle, calculer les intégrales données.*

1. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(3x^2+2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.
2. $\int_0^1 \frac{x^2-3x+4}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1.5.
1. *Montrer que* $\forall x\geqslant 0, 0\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$.
2. *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x=0$.

Exercice 1.6. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

1. *On suppose que f est paire. Montrer que $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$. Indication : utiliser la relation de Chasles et le changement de variable $u = -t$, mais de façon judicieuse....*
2. *On suppose que f est impaire. Calculer $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.*

Exercice 1.7. *Soit $x \in [0;1]$ et f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = \ln(1+t)$.*

1. *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $f^{(k)}(t)$. (Calculer les premières dérivées puis conjecturer et démontrer le résultat pour k quelconque.)*
2. *En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0;x]$ à la fonction f, montrer que :*

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

3. *Qu'en déduit-on sur la série $\sum \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$?*

Exercice 1.8. *On cherche à calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.*

1. *Mettre la somme sous la forme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, en choisissant bien la fonction f.*
2. *Appliquer alors le théorème de la moyenne avec la fonction f déterminée ci-dessus et $a = 0$ et $b = 1$, pour calculer la limite demandée.*

Exercice 1.9. *A l'aide du théorème de la moyenne, déterminer les limites suivantes :*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4}$
3. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

2 Suites d'intégrales

Exercice 2.1. *Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.*

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.*
2. *Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.*
3. *Expliciter I_n en fonction de n. (Distinguer le cas n pair et le cas n impair).*
4. *Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.*
5. *Montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ est constante. En déduire un équivalent de I_n en l'infini.*
6. *Montrer la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$.*

3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Exercice 12 : On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\lfloor x^2 \rfloor$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

4 Extension de la notion d'intégrale

Exercice 4.1. *Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et en cas de convergence donner leur valeur :*

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t$
3. $\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$
4. $\int_0^{+\infty} 1\ \mathrm{d}t$
5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\ \mathrm{d}t$
6. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$
7. $\int_0^{+\infty} \cos(x)\mathrm{d}x$

5 Utilisation des critères de convergence

Exercice 5.1. *À l'aide du critère des équivalents, déterminer la nature des intégrales suivantes :*

1. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\ \mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\ \mathrm{d}t$
3. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}\ \mathrm{d}x$
5. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

Exercice 5.2.
1. *On souhaite déterminer la nature de* $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$.
   (a) *Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?*
   (b) *Déterminer un équivalent simple de* $\frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$ *en 0 .*
   (c) *Que peut-on dire de* $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$ *et donc de la nature de* $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t$?
2. *En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de* $\int_1^2 \frac{t^3-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

Exercice 5.3.
1. *On souhaite déterminer la nature de* $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}\ \mathrm{d}t$.
   (a) *Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?*
   (b) *Justifier que* $\frac{1}{t^2-t} \sim \frac{1}{t-1}$.
   (c) *Par la "méthode par calcul", déterminer la nature de* $\int_1^2 \frac{1}{t-1}\ \mathrm{d}t$.
   (d) *Conclure quant à la nature de* $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}\ \mathrm{d}t$.
2. *En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de* $\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 5.4. *1. On souhaite déterminer la nature de* $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

(a) *Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ? Quel est votre "intuition" quant à la réponse à ce(s) problème(s) ?*

(b) *Déterminer un réel* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim_{u\to+\infty} u^\alpha \mathrm{e}^{-u^2} = 0$

(c) *Grâce à la question précédente, on peut dire qu'il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* $u > c, \mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \frac{1}{u^\alpha}$*. Conclure alors quant à la nature de* $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

2. En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

6 Changement de variable

Exercice 6.1. *1. Pour quelles valeurs de* $a \in \mathbb{R}$*, l'intégrale*

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t$$

est-elle convergente ?

2. (a) *Grâce au changement de variable* $t = \frac{1}{x}$*, montrer que* $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x$.

(b) *En déduire que* $I(a) = \frac{\pi}{4}$*. (Indication : calculer* $I(a) + I(a)$*)*

Exercice 6.2. *1. Justifier la convergence de l'intégrale* $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$*. On pose* $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$

2. A l'aide du changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$*, montrer que* $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$.

3. En calculant de deux manières la somme $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$*, montrer que :*

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u$$

4. Montrer que $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u$.

5. En exploitant les deux questions précédentes, déterminer la valeur de I.

7 Une intégrale semi-convergente

Exercice 7.1. *1. Montrer que l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*
Indication : *utiliser une intégration par partie sur une intégrale sur un segment bien choisi.*

2. *Montrer que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.*
Indication : remarquer que pour tout $t \geqslant 1, \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geqslant \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.
3. *On admet que $I = \frac{\pi}{2}$. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.*
4. *Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.*

8 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 8.1. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.*

1. *Montrer que l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.*
2. *Montrer que pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*
3. *En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 8.2. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Quel est le sens de variation de f?*
3. *On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.*
   (a) *Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.*
   (b) *En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.*

9 Fonction intégrables

Exercice 9.1. *Supposons que I est un intervalle borné et que f est une fonction continue et bornée sur I. Montrer f est intégrable sur I.*

Exercice 9.2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.*

1. *Montrer que pour tout $x \geqslant 0 : \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant xf(x) \leqslant 2\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = 0$.*
3. *En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.*