

Programme de khôlle 9

Semaine du 30 novembre 2020

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Résoudre les équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} :

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $2y' - 4y = 0$ | 6. $y' + t^2y = 0$ |
| 2. $2y' + 7y = 0$ | 7. $y' + 3y = te^{-3t}$ |
| 3. $4y' = 6y$ | 8. $y' - 2y = t^2e^{4t}$ |
| 4. $2y' + 3ty = 0$ | 9. $2y' + 4y = te^{-2t}$ |
| 5. $2y' + \cos(t)y = 0$ | |

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.

1. Donner le domaine de définition. Est-il possible de réduire le domaine d'étude ?
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) Démontrer que f est strictement monotone sur \mathbb{R}_+ .
En déduire que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle J à déterminer.
3. Donner l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.
4. Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x .
5. Donner une esquisse de \mathcal{C}_f . Comment en déduire une esquisse de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$?

Exercice 2.2. On considère l'application f de $\mathbb{R} - \{2\}$ dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

1. Déterminer les limites en $-\infty$, $+\infty$, 2^+ et 2^- .

2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Donner l'équation réduite de la tangente T_4 au point d'abscisse 4.
4. Étudier la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à T_4 .
5. Soit $I =]2; +\infty[$. Prouver que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser.
6. Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x sur J .
7. Donner une esquisse de \mathcal{C}_f . Comment en déduire une esquisse de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$?

Exercice 2.3. On considère la fonction f dont l'expression est

$$f(x) = \ln(\ln(x)).$$

1. Donner le domaine de définition de f . Est-elle dérivable sur cet intervalle ?
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats.
3. Déterminer les variations de f sur $]1; +\infty[$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans $]1; +\infty[$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f en son point d'intersection avec l'axe des abscisses.
5. Donner une esquisse de \mathcal{C}_f .

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.13 : Dérivée et applications

1. Notion de tangente en un point du graphe

- 1.1 Taux d'accroissement et tangente en un point
- 1.2 Équation réduite de la tangente
- 1.3 Interprétation graphique d'un taux d'accroissement nul ou infini

2. Fonctions dérivables et applications

- 2.1 Dérivabilité en un point et fonction dérivée
- 2.2 Application à l'étude des fonctions

Plan d'étude d'une fonction

3. Fonction réciproque
 - 3.1 Existence d'une fonction réciproque
 - 3.2 Graphe de la fonction réciproque
 - 3.3 Dérivée de la fonction réciproque

Chap.14 : Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Notion d'équation différentielle

2. Équations différentielles du premier ordre

2.1 Définition

2.2 Résolution de l'équation homogène $y'(t) + a(t)y = 0$

2.2.1 Lorsque a est une fonction constante

2.2.2 Cas général

2.3 Résolution de l'équation complète

2.4 Recherche de solutions particulières

2.4.1 Coefficient constant et second membre constant

2.4.2 Second membre de la forme $b(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{K}$

2.4.3 Méthode de variation de la constante

2.4.4 Principe de superposition des solutions