

Programme de khôlle 16

Semaine du 1er février 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Question de cours(5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Questions de cours

1. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$, démontrer que si p^2 est pair, alors p est pair.
(b) Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :
 - $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une valeur approchée de x à 10^{-n} près par défaut.
 - $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est une valeur approchée de x à 10^{-n} près par excès.
3. Démontrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. 1. Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{i\}$ dans \mathbb{C} qui à tout complexe $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ associe $f(z) = \frac{2z-1}{iz+1}$.

- (a) Déterminer l'image de 1 et les éventuels antécédents de 0 par f .
 - (b) Le complexe $-2i$ possède-t-il une image par f ? Un antécédent par f ?
 - (c) Montrer que tout complexe z' différent de $-2i$ possède un unique antécédent par f . Qu'en conclure ?
2. Une assemblée de 15 hommes et 12 femmes désire élire un comité de 6 membres, madame A refuse de siéger dans tout comité dont ferait partie monsieur B.
 - (a) Quel est le nombre de comités qui pourront être constitués dans ces conditions ?
 - (b) Dénombrer ceux de ces comités dont madame A ferait partie.

- Exercice 2.2.** 1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer son application réciproque.
2. Combien existe-t-il de manières de ranger 8 livres numérotés sur 2 étagères ?

Exercice 2.3. 1. Soient :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - 2y = 2\} \text{ et } B = \{(2t + 2, 3t + 2); t \in \mathbb{R}\}.$$

Démontrer que $A = B$.

2. Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.
- (a) Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
- (b) Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
- (c) Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
- (d) On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.24 : Applications et ensembles finis

1 Généralités

Image, antécédents par une application $f : E \rightarrow F$.

Ensemble de départ, ensemble d'arrivée.

Image directe d'un sous-ensemble de E , image réciproque d'un sous-ensemble de F .

2 Injection, surjection et bijection

3 Cardinal d'un ensemble fini

3.1 Opérations sur les ensembles

Union, intersection, produit cartésien, complémentaire.

3.2 Cardinal d'un ensemble

3.3 Lien entre cardinal, injectivité, surjectivité et bijectivité

3.4 Opérations sur les ensembles et les cardinaux

Chap.25 : Dénombrements

1 Nombre de p -uplets

Sans éléments distincts, avec éléments distincts, nombre de permutations d'un ensemble fini A .

2. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments

Combinaison d'un ensemble fini A de cardinal n à $p \leq n$ éléments.

Chap.26 : Ensemble des réels

1. Sous ensembles usuels

1.1 Entiers naturels et relatifs.

1.2 Ensemble des rationnels.

1.3 Nombres décimaux et valeur approchée d'un réel.

2. Relation d'ordre dans \mathbb{R}

2.1 Ordre et opérations.

Inégalité triangulaire.

2.2 Majorant et minorant d'une partie.