Devoir Surveillé 4 - CORRECTION

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :*

$$\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -\left(4a+a^2\right) & -(2a+2) \end{pmatrix}.$$

Quelques propriétés de la matrice M_a

1. *Pour quelles valeurs du paramètre a, la matrice M_a est-elle inversible ?*
   On sait que : $\quad (\mathrm{M}_a \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (\det(\mathrm{M}_a) \neq 0)$. *Un développement suivant la première colonne de M_a donne :*
   $$\det(\mathrm{M}_a) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -\left(4a+a^2\right) & -(2a+2) \end{vmatrix} = -2a^2$$
   Ainsi, il est immédiat que : $\quad (\mathrm{M}_a \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (a \neq 0)$.
2. *Déterminer le rang de M_a lorsque M_a n'est pas inversible.*
   On a clairement que $\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   La première colonne de M_0 étant nulle, et les deux suivantes étant non proportionnelles, on en déduit que le rang de M_0 est égal à 2 .
   Éléments propres de M_a
3. *Montrer que* $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de M_a associé à la valeur propre λ que l'on précisera. Déterminer sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ.*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_a\mathrm{U} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -\left(4a+a^2\right) & -(2a+2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -2a^2+2\left(4a+a^2\right)-4(2a+2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Puisque $\mathrm{M}_a\mathrm{U} =$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= -2\mathrm{U}
\end{aligned}
$$

$-2\mathrm{U}$*, par définition, -2 est valeur propre de* M_a *et* U *est un vecteur propre associé à la valeur propre 2 . Par définition, le sous-espace propre* $\mathrm{E}_{-2}\left(\mathrm{M}_a\right)$ *est* $\operatorname{Ker}\left(\mathrm{M}_a+2\mathrm{I}_3\right)$*. Or on a :* $\mathrm{M}_a+2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 10 & \\ 0 & 2 & 1 \\ -2a^1 & -\left(4a+a^2\right) & -2a \end{pmatrix}$*. Un échelonnement en colonnes donne :*

$$
\mathrm{M}_a+2\mathrm{I}_3 \underset{\mathrm{C}_2\leftarrow 2\mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2a^2 & -8a & -2a \end{pmatrix} \underset{\mathrm{C}_3\leftarrow 4\mathrm{C}_3-\mathrm{C}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2a^2 & -8a & 0 \end{pmatrix}
$$

et par suite, on en déduit que $\operatorname{rg}\left(\mathrm{M}_a+2\mathrm{I}_3\right)=2$.

Ainsi, d'après le théorème du rang, on en déduit que :

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\mathrm{M}_a+2\mathrm{I}_3\right)\right)=3-2=1,$$

c'est à dire que $\mathrm{E}_{-2}\left(\mathrm{M}_a\right)$ *est une droite vectorielle.*
Or $U \in E_{-2}\left(M_a\right)$ *et* U *non nul, donc* $E_{-2}\left(M_a\right)=Vect(U)$.

4. *Calculer le polynôme caractéristique de* M_a*.*

$$
\begin{aligned}
&\chi_{\mathrm{M}_a(\lambda)} = \det\left(\lambda\mathrm{I}_3-\mathrm{M}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2a^2 & 4a+a^2 & \lambda+(2a+2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ -2\lambda-4 & \lambda & -1 \\ 4\lambda+8 & 4a+a^2 & \lambda+2a+2 \end{vmatrix} \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1-2\mathrm{C}_2+4\mathrm{C}_3 \\
&= (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 4 & 4a+a^2 & \lambda+2a+2 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2+2\ \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3\leftarrow\mathrm{L}_3-4\ \mathrm{L}_1}}{=} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & (a+2)^2 & \lambda+2a+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)\left(\lambda^2+2a\lambda-4a-4+(a+2)^2\right) \\
&= (\lambda+2)\left(\lambda^2+2a\lambda+a^2\right) \\
&= (\lambda+2)(\lambda+a)^2
\end{aligned}
$$

5. *Montrer que $-a$ est une valeur propre multiple de M_a.*
   D'après le calcul précédent, $-a$ est une valeur propre de multiplicité 2 puisque racine d'ordre 2 pour χ_{M_a}.
6. *Montrer que M_a n'est pas diagonalisable. On distinguera les cas $a = 2$ et $a \neq 2$.*
   Cas $a = 2$: il vient dans que cas que $\chi_{\mathrm{M}_a}(\lambda) = (\lambda + 2)^3$, et par suite que la seule valeur propre de M_2 est -2 . Si la matrice M_2 étant diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $-2\mathrm{I}_3$, ce qui compte-tenu de la formule de semblablitude que l'on pourrait écrire entre M_2 et $-2\mathrm{I}_3$, il viendrait que $\mathrm{M}_2 = -2\mathrm{I}_3$, ce qui n'est clairement pas le cas.
   Cas $a \neq 2$: d'après ce qui précède, les seules valeurs propres de M_a sont -2 et $-a$. On sait dans ce cas que M_a est diagonalisable si, et seulement si, $\dim(\mathrm{E}_{-2}(\mathrm{M}_a)) + \dim(\mathrm{E}_-a(\mathrm{M}_a)) = 3$, *ce qui compte-tenu du fait que $\mathrm{E}_{-2}(\mathrm{M}_a)$ est une droite vectorielle, revient à s'assurer que* $\dim(\mathrm{E}_-a(\mathrm{M}_a)) = 2$. *Puisque $\mathrm{E}_{-a}(\mathrm{M}_a) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M}_a + a\mathrm{I}_3)$ un échelonnement en ligne de $\mathrm{M}_a + a\mathrm{I}_3$ donne :*
   $$\mathrm{M}_a + a\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -2a^2 & -4a - a^2 & -a - 2 \end{pmatrix}$$
   $$\underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2a\ \mathrm{L}_1}{\sim} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -2a - a^2 & -a - 2 \end{pmatrix}$$
   $$\underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + (a+2)\mathrm{L}_2}{\sim} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $\mathrm{rg}(\mathrm{M}_a + a\mathrm{I}_3) = 2$ *y compris si $a = 0$, donc par le théorème du rang, il vient que* $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M}_a + a\mathrm{I}_3)) = 3 - 2 = 1$, *ce qui donne que* $\dim(\mathrm{E}_-a(\mathrm{M}_a)) = 1$, *et par suite, que la matrice M_a n'est pas diagonalisable.*
   Étude d'un cas particulier

   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\varepsilon_1 = (1, -2, 4)$.*
7. *Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ et dont la première coordonnée est égale à 1 .*
   En notant $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\varepsilon_2 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

   $(f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \Leftrightarrow$
   $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_2) = -2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_2) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_1))$.

Or on a : $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -8x-12y-6z \end{pmatrix}$ *et*
$-2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_2) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y-2 \\ -2z+4 \end{pmatrix}$
Ainsi, (x,y,z) *est solution du système de représentation matricielle* $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$ *que l'on résout par échelonnement en lignes :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{\overset{\sim}{\mathrm{L}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\overset{\sim}{\mathrm{L}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{L_1 \leftarrow 2\ L_1 + 3\ L_2}}{\sim\!\sim_{\mathrm{L}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}\ L_1} \\ \mathrm{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\ L_2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le vecteur $\varepsilon_2 = (1,-1,0)$ *est alors clairement solution de ce système, et par conséquent convient.*

8. *Montrer qu'il existe un vecteur* ε_3 *de* $\mathbb{R}^3$ *tel que la famille* $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *constitue une base de* $\mathbb{R}^3$ *et tel que la matrice de* f *dans* $\mathscr{B}'$ *soit* $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *et dont la première cordonnée est égale à 1 .*
Le vecteur ε_3 *à chercher doit vérifier compte-tenu la forme de la matrice T que* $f(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

En notant $\varepsilon_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *on a :*

$(f(\varepsilon_3) = -2\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \Leftrightarrow$
$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_3) = -2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_3) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_2))$.

Or on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -8x-12y-6z \end{pmatrix}$$

et

$$-2\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_3) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y-2 \\ -2z \end{pmatrix}$$

Ainsi, (x, y, z) *est solution du système de représentation matricielle* $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$ *que l'on résout par échelonnement en lignes :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2\ L_1 + 3\ L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\ L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le vecteur $\varepsilon_3 = (1, -1, 1)$ *est alors clairement solution de ce système, et par conséquent convient.*

Étude du cas $a \neq 2$.

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \lambda$ *désigne la valeur propre déterminée à la question 3.*

On rappelle que U est un vecteur propre de_a*, associé à la valeur propre* λ.

9. *Expliquer pourquoi* M_a *a exactement deux valeurs propres réelles* λ *et* $-a$.

   Les valeurs propres de M_a *étant exactement les racines de son polynôme caractéristique, on en déduit d'après ce qui précède, que les valeurs propres de* M_a *sont -2 et* $-a$.

10. *Déterminer un vecteur propre* V *de* M_a*, de première composante égale à 1 , associé à la valeur propre* $-a$.

    On cherche un vecteur $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *tel que* $\mathrm{M}_a\ \mathrm{V} = -a\ \mathrm{V}$.

    Donc (y, z) *est solution du système de représentation matricielle :*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & 0 \\ -\left(4a + a^2\right) & -a-2 & 2a^2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - a\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \left(4a + a^2\right) L_1}}{\sim L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & -a-2 & -2a^2 - a^3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + (a+2) L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

D'où $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ a^2 \end{pmatrix}$.

11. Déterminer $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *tel que* $\mathrm{M}_a\ \mathrm{W} = \mathrm{V} - a\ \mathrm{W}$.

(y,z) est solution du système de représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -a \\ -\left(4a+a^2\right) & -a-2 & a^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \sim \mathrm{L}_2 - a\ \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \left(4a+a^2\right)\mathrm{L}_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & -a-2 & 2a^2+4a \end{array}\right) \sim_{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + (a+2)\mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2a \end{pmatrix}$.

12. Montrer que M_a *est semblable à la matrice* $\mathrm{T}_a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

La famille $\mathscr{B}'' = \left((1,-2,4), \left(1,-a,a^2\right), (0,1,-2a)\right)$ *est telle que :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & a & 1 \\ 4 & a^2 & -2a \end{vmatrix} \quad \mathrm{C}_1 \leftarrow \overline{\overline{\mathrm{C}}}_1 - \mathrm{C}_2 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2+a & -a & 1 \\ 4-a^2 & a^2 & -2a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \quad (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -2+a & 1 \\ 4-a^2 & -2a \end{vmatrix} \\
&= \quad -\left(-2a(a-2) - \left(4-a^2\right)\right) \\
&= \quad -\left(-2a^2+4a-4+a^2\right) \\
&= a^2-4a+4 \\
&= \quad (a-2)^2 \\
&\neq \quad 0 \text{ car } a \neq 2
\end{aligned}$$

C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Par construction des trois vecteurs de cette base, la matrice de f dans cette base est alors la matrice T.

Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+3} = -18u_n + 3u_{n+1} + 4u_{n+2}, \end{array} \right.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

13. *Montrer qu'il existe une matrice* $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n.$$

Identifier $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $A = M_a$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -18 & 3 & 4 \end{pmatrix}$*, c'est à dire* $A = M_{-3}$*, il est immédiat que :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.

14. *Déterminer une matrice triangulaire supérieure* T *et une matrice* P *inversible, telles que* $A = PTP^{-1}$.

D'après la Q.12, $A = PTP^{-1}$ *où* $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

15. *En décomposant* T *sous la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, calculer* T^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

On écrit $T = D + N$ *où* $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Un calcul direct permet de vérifier que $DN = ND$ *et que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, N^k = (0).$$

Par suite, d'après la formule du binôme de Newton, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^k D^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} N^K d^{n-k}$$
$$= D^n + nND^{n-1}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

16. *Donner l'expression de* X_n *en fonction de* X_0, T, P *et* P^{-1} *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$$

Donc pourrait montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ *et par suite que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0.$$

Exercice 0.2 *On considère, sous réserve d'en avoir établi la convergence dans la suite de l'énoncé, la suite* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des intégrales impropres définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^n\right) \mathrm{d}t.$$

Préliminaire technique

1. *Donner l'expression sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de la dérivée de la fonction :*

$$p : x \longmapsto x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, p'(x) = 1 \times \ln\left(x^2+1\right) + x \times \frac{2x}{x^2+1} - 2 + 2 \times \frac{1}{x^2+1}$
$= \ln\left(x^2+1\right) + \frac{2x^2+2}{x^2+1} - 2 = \ln\left(x^2+1\right) + 2 - 2$
$= \ln\left(x^2+1\right)$

2. *Déterminer les primitives sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de la fonction* $x \longmapsto \ln(x)$.
Soit $x > 0$. *Une intégration par parties en posant :*

$$u(t) = \ln(t) \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

où les deux fonctions u *et* v *sont* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[1;x]$ *donne que :*

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1 \ \mathrm{d}t \\ &= [t\ln(t)]_1^x - [t]_1^x \\ &= x\ln(x) - 0 - x + 1 \\ &= x\ln(x) - x + 1\end{aligned}$$

Étude d'une intégrale auxiliaire

On considère la fonction f *définie par :*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{1-\cos(u)}{u^2} \end{array} \right. .$$

On considère par ailleurs, sous réserve d'avoir établi la convergence de l'intégrale impropre intervenant dans cette définition dans la suite de l'énoncé, la fonction

$$\mathrm{L} : x \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{e}^{-xu} \ \mathrm{d}u.$$

3. *Montrer que :* $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u) \leq \frac{2}{u^2}$.
On sait que :

$\forall u \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(u) \leq 1$. *Donc :* $\quad \forall u \in \mathbb{R}, -1 \leq -\cos(u) \leq 1$.

Ainsi :

$$\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - \cos(u) \leq 2$$

et par suite :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \tfrac{1-\cos(u)}{u^2} \leq \tfrac{2}{u^2}$$

car $u^2 > 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

4. *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en 0, et préciser ce prolongement. Pour la suite, on notera encore* f *le prolongement de* f *à* $\mathbb{R}_+$.
   On sait que : $\quad 1 - \cos(u) \underset{u \to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ *donc par quotient, il vient que :*

$$f(u) \underset{u \to 0}{\sim} \frac{\frac{u^2}{2}}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

   Par suite, on en déduit que $f(u) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, *et par conséquent que* f *est prolongeable par continuité en 0 par* $f(0) = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, le prolongement par continuité de f *à* $\mathbb{R}_+$*est la fonction* $\tilde{f}$ *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par :*

$$\tilde{f} : u \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad u = 0 \\ \frac{1-\cos(u)}{u^2} & si \quad u > 0 \end{cases}$$

5. *En déduire que l'intégrale* $\mathrm{L}(0)$ *est convergente.*

   La fonction $f : u \longmapsto f(u)$ *étant par construction continue sur* $\mathbb{R}_+$, *l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ *est impropre en sa seule borne* $+\infty$. *D'après la question Q19, on sait que :*

$$\forall u \geq 1, 0 \leq f(u) \leq \tfrac{2}{u^2}$$

   On sait que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ *est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale impropre* $\int_1^{+\infty} \frac{2}{u^2}\,\mathrm{d}u$ *est convergente.*

   Par conséquent, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ *est convergente.*

   Finalement, il vient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ *est convergente avec* $\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$.

   Ainsi, L(0) est bien convergente.

6. *En déduire que la fonction L est définie sur* $\mathbb{R}_+$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. *La fonction* f *étant prolongeable par continuité en 0 , et puisque* $\mathrm{e}^{-xu} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$, *la fonction* $g : u \longmapsto f(u)\mathrm{e}^{-xu}$ *est continu sur* $[0;+\infty[$.

   Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u$ *est impropre seulement en sa borne* $+\infty$.

   Par décroissance sur $\mathbb{R}$ *de la fonction* $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, *on a :* $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \mathrm{e}^{-ux} \leq 1$. *On sait que :*
   $$\forall u \in \mathbb{R}, 1-\cos(u) \geq 0$$
   donc :
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \frac{1-\cos(u)}{u^2}\mathrm{e}^{-xu} \leq \frac{1-\cos(u)}{u^2}$$
   D'après la question précédente l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ *étant convergente, d'après le théorème de comparaison pour les intégrale impropres de fonctions positives, l'intégrale* $\int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u$ *est convergente, et ainsi, l'expression* $\mathrm{L}(x)$ *est définie.*

   En conclusion, la fonction L est bien définie sur $\mathbb{R}$.
7. *Montrer que :*
   $$\forall u \in \mathbb{R}, 1-\cos(u) \leq \frac{u^2}{2}.$$
   En déduire que :
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}.$$
   Indication : *on pourra étudier la fonction* $h : u \longmapsto \frac{u^2}{2} - 1 + \cos(u)$.
   Soit $h : u \longmapsto \frac{u^2}{2} - 1 + \cos(u)$.
   La fonction h *est clairement de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 , et il est immédiat que :*
   $$\forall u \in \mathbb{R}, h(-u) = h(u).$$
   La fonction h *est donc paire, et il suffit alors de l'étudier sur* $\mathbb{R}_+$.

   Par ailleurs, on a :
   $$\forall u \in \mathbb{R}, h'(u) = u - \sin(u).$$
   Or sur $\mathbb{R}_+$, *on sait que :*
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+, \sin(u) \leq u.$$
   Par conséquent, il vient que : $\forall u \in \mathbb{R}_+, h'(u) \geq 0$. *La fonction* h *est donc croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *et est donc minorée par sa valeur en 0 qui est 0 .*

   Par suite, par parité de h, *on en déduit que :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, h(u) \geq 0$$

c'est à dire $1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$.

Finalement il vient que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \frac{1-\cos(u)}{u^2} \leq \frac{1}{2}$$

puisque $u^2 > 0$.

8. *Soit* $x \in \mathbb{R}_+$. *Déduire des questions précédentes que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \mathrm{L}(x) \leq \frac{1}{2x}.$$

Quelle est alors la limite en $+\infty$ *de la fonction L ?*
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. *D'après la question précédente, on a :*

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}$$

et par suite :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u)\mathrm{e}^{-xu} \leq \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}$$

Il est immédiat que : $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \int_0^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2x}\right]_0^{\mathrm{A}}$

$$= -\frac{\mathrm{e}^{-uA}}{2x} + \frac{1}{2x}$$

et donc :

$$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}\,\mathrm{d}u \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2x}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}\,\mathrm{d}u$ *est convergente et a pour valeur* $\frac{1}{2x}$.

De la relation : $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u)\mathrm{e}^{-xu} \leq \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}$, *les fonctions intervenants étant continues et positives sur* $[0;+\infty[$, *et les intégral* $\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}\,\mathrm{d}u$ *étant convergentes, d'après le théorème sur la croissance de l'intégrale pour les intégrales impropre on en déduit que :*

$$0 \leq \int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xu}}{2}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi, on a bien :

$$0 \leq \mathrm{L}(x) \leq \frac{1}{2x}.$$

Par suite, puisque $\frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que :*

$$\mathrm{L}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9. *On admet que la fonction L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{L}''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(u))\mathrm{e}^{-xu}\ \mathrm{d}u$$

Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\ \mathrm{d}u$ pour tout $x > 0$.

Puis en déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(u)\mathrm{e}^{-xu}\ \mathrm{d}u$ pour tout $x > 0$.

Soit $x > 0$. La fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Montrons que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\ \mathrm{d}u$ est absolument convergente, c'est à dire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right| \mathrm{d}u$ est convergente.

On a :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \left|\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right| \leq \mathrm{e}^{-xu}$$

car :

$$\left|\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right| = \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-xu}\right|}_{=e^{-xu}} \times \underbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\right|}_{=1}.$$

On a vu précédemment que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\ \mathrm{d}u$ était convergente, donc on en déduit d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, que $\int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right| \mathrm{d}u$ est convergente.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+ic)u}\ \mathrm{d}u$ est absolument convergente, donc convergente.

Soit alors $A > 0$. On a directement que :

$$\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\ \mathrm{d}u = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}}{-x+\mathrm{i}}\right]_0^{\mathrm{A}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})\mathrm{A}}}{-x+\mathrm{i}} - \frac{1}{-x+\mathrm{i}}$$

Comme : $\forall \mathrm{A} > 0, \left|\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})\mathrm{A}}\right| \leq \mathrm{e}^{-x\ \mathrm{A}}$ et que $\mathrm{e}^{-x\ \mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\ \mathrm{d}u = \tfrac{1}{x-\mathrm{i}}.$$

Or on a par définition d'une intégrale impropre d'une fonction à valeur complexe que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right) \mathrm{d}u + \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right) \mathrm{d}u$$

et ainsi que :

$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u\right)$.

Comme on a : $\forall u \in \mathbb{R}_+, \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-xu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{e}^{-xu}(\cos(u) + \mathrm{i}\sin(u)) \\ &= \mathrm{e}^{-xu}\cos(u) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-xu}\sin(u) \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u\right) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\cos(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u} \,\mathrm{d}u\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

il vient que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\cos(u)\mathrm{d}u = \tfrac{x}{x^2+1}.$$

10. *Déterminer alors une expression de* $\mathrm{L}(x)$ *pour tout* $x > 0$*, puis en déduire qu'il existe deux réels* C *et* D *tels que l'on ait :*

$$\forall x > 0,\ \mathrm{L}(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \mathrm{C}x + \mathrm{D}$$

D'après la question précédente et puisque toutes les intégrales sont convergentes, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{L}''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu} \,\mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \cos(u)\mathrm{e}^{xu} \,\mathrm{d}u$$

Comme on a vu que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}$*, on en déduit que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{L}''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Par conséquent, il vient :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{L}'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

D'après les questions (1) et (2), on en déduit que :

$\exists (\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$
$L(x) = (x\ln(x) - x) - \frac{1}{2}\left(x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan(x)\right) + \mathrm{C}x + \mathrm{D}$
$= -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \mathrm{C}x + \mathrm{D}$

11. *En utilisant la limite de* L *en* $+\infty$*, déterminer les constantes* C *et* D*, puis en déduire la valeur de* L(0)*.*

Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \frac{x}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

on en déduit que :

$$\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2} \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x}$$

et par suite :

$$\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $\arctan(x) + \mathrm{D} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + \mathrm{D}$ *et que l'on a vu que* $\mathrm{L}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*, on a* $\mathrm{C} = 0$ *car sinon* $\mathrm{L}(x)$ *ne peut tendre vers lorsque* x *tend vers* $+\infty$*, puis que* $\mathrm{D} = \frac{\pi}{2}$*.*

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{L}(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

La fonction L étant continue sur $\mathbb{R}_+$*et donc en particulier en 0 , il vient que :*

$$-\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{L}(0)$$

Étude asymptotique de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour tout entier naturel n*, on considère la fonction* f_n *définie par :*

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1-\cos\left(t^n\right)}{t^n} \end{array}$$

12. *Calculer, pour tout réel positif* x*, l'intégrale* $\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t$*.*
Qu'en déduire pour l'intégrale I_1 *?*

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t &= [-\cos(t)]_0^x \\ &= -\cos(x) + 1 \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ *n'admet pas de limite lorsque* x *tend vers* $+\infty$*, on en déduit que l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{d}t$ *divergente, c'est à dire que* I_1 *est divergente.*

13. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f_n(t) \leq \frac{2}{t^n}.$$

Sur le même principe que précédemment puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos\left(t^n\right) \leq 1$$

on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - \cos\left(t^n\right) \leq 2$$

et donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \frac{1-\cos(t^n)}{t^n} \leq \frac{2}{t^n}.$$

14. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que* f_n *est prolongeable par continuité en 0 , et préciser ce prolongement.*

Pour la suite, on notera encore f_n *le prolongement par continuité de* f_n *à* $\mathbb{R}_+$*.*

Le cas $n = 0$ *est trivial.*

Sur le même principe que précédemment puisque $t^n \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$*, il vient que :*

$$1 - \cos\left(t^n\right) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{2}\left(t^n\right)^2$$

Par conséquent :

$$f_n(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{2}\left(t^n\right)^2 \times \frac{1}{t^n} = \frac{t^n}{2}$$

Comme $\frac{t^n}{2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ *:*

$$\lim_{t \to 0} f_n(t) = 0$$

et par conséquent que f_n *est prolongeable par continuité en* 0 *en posant* $f_n(0) = 0$.

15. *Soit* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$*. Montrer que l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*
La fonction f_n *est donc continue sur* $\mathbb{R}_+$*, dont l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ *est impropre en sa borne* $+\infty$*.*

On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f_n(t) \leq \frac{2}{t^n}.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ *est une intégrale de Riemann convergente puisque* $n \geq 2$*, donc par suite* $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^n}\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

D'après le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ *converge, et par conséquent que* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*

16. *Soit* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *et* $\varepsilon > 0$*. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :*

$$\forall x > \varepsilon, \int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{x f_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{ll} u(t) = 1-\cos(t^n) & u'(t) = nt^{n-1}\sin(t^n) \\ v(t) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}} & v'(t) = \frac{1}{t^n} \end{array}$$

où u *et* v *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $[\varepsilon; x]$*, il vient que :*

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^x f_n(t)\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^x \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{n-1}\frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\right]_\varepsilon^x + \frac{n}{n-1}\int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n-1}\frac{1-\cos(x^n)}{x^n} + \frac{1}{n-1}\frac{1-\cos(\varepsilon^n)}{\varepsilon^n} + \frac{n}{n-1}\int_\varepsilon^n \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir que :

$$\int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{xf_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

17. *Montrer alors que l'intégrale* I_n *est convergente pour tout* $n \in \mathbb{N}, \backslash\{0,1\}$*, puis en exprimer sa valeur en fonction de* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$*.*
On a :

$$\frac{xf_n(x)}{n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après la question Q13. De même, d'après Q13, $\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand* x *tend vers* $+\infty$*.*
Dans l'expression $\frac{xf_n(x)}{n} - \frac{1\times f_n(1)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_1^x f_n(t)\mathrm{d}t$*, lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *:*
— *le premier terme tend vers 0*
— *le second terme est constant (par rapport à* x*)*
— *le troisième terme admet une limite finie d'après Q13.*
donc $\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ *est convergente et vaut* $-\frac{f_n(1)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$*.*

Sur le même principe, f_n *étant continue en 0 avec* $f_n(0) = 0$*, on en déduit que :*

$$-\frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Dans l'expression $\frac{1\times f_n(1)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^1 f_n(t)\mathrm{d}t$, *lorsque* ε *tend vers* 0 *:*

— *le premier terme est constant*

— *le second terme tend vers 0*

— *le troisième terme admet une limite finie.*

donc $\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ *est convergente et a pour somme* $\frac{f_n(1)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ *est convergente.*

On en déduit alors que :

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

18. *À l'aide du changement de variables* $u = t^n$ *dans l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$, *établir que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

Le changement de variable $u = t^n$ *étant de classe* $\mathscr{C}^1$ *et strcitement croissant de* $]0;+\infty[$ *sur* $]0;+\infty[$, *d'après le théorème de changement de variables, les deux intégrales impropres* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u} \times \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$ *sont de même nature et égales en cas de convergence, qui est acquise d'après les questions précédentes.*

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u} \times \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$, *et on en déduit ainsi que :*

$$\mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

ce qui est le résultat attendu.

19. *On admet que :* $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{L}(0)$.

Donner alors un équivalent de I_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$, *puis la limite de la suite* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{L}(0) = \frac{\pi}{2}$,*donc :*

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{n-1}{n^2}$$

Or $\frac{n-1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, *donc :*

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$