Pour le 4 septembre 2023
Devoir-Maison 1 - CORRECTION

Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E est dit **nilpotent** si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ où le plus petit entier k tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ est appelé **indice de nilpotence.** :

$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

PARTIE A. Deux exemples.

1. Soit l'application linéaire : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $\bar{z} - iz$. On se place dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$ et on prend pour base $\mathscr{B} = (1, i)$. Par exemple, la matrice du vecteur $2-3i$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner la matrice A de f et montrer que f est nilpotent d'indice 2 .
   Calculons $f(1) = 1 - i$ et $f(i) = -i - i \times i = 1 - i$.
   La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est donc
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   Puisque $A^2 = 0_{22}$, on a $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}$, ce qui signifie que f est nilpotent d'indice 2.
   (b) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(1 - i)$ et que $\text{Im}(f) = \ker(f)$.
   Soit $a + ib \in \ker(f) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow a + ib = a(1 - i)$.
   On a donc $\ker(f) = \text{Vect}(1 - i)$.
   Puis :
   $$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(i)) = \text{Vect}(1 - i, 1 - i) = \text{Vect}(1 - i) = \ker(f).$$
   (c) Montrer que $\mathscr{B}' = (1 - i, 1)$ est une base de $\mathbb{C}$.
   Testons la liberté de la famille : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $$a(1 - i) + b \times 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ \quad -a \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

La famille est donc libre. Par ailleurs : $card(\mathscr{B}') = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
$\mathscr{B}'$ est donc une base de $\mathbb{C}$.

(d) Donner alors la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$ et rappeler le lien entre les deux matrices A et M.
Calculons $f(1-i) = 0$ et $f(1) = 1-i$.
La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le lien entre les matrices est le suivant :

$$A = PMP^{-1}$$

2. Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à P associe $XP'' + P' + P$

(a) Montrer que Φ est linéaire.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$.
On calcule :

$$\Phi(\lambda P+Q) = X(\lambda P+Q)'' + (\lambda P+Q)' + \lambda P + Q = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q)$$

Φ est donc linéaire.

(b) Donner sa matrice M dans la base canonique $\left(1, X, X^2\right)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
On calcule $\Phi(1) = 1, \Phi(X) = 1 + X, \Phi\left(X^2\right) = 2X + 2X + X^2 = 4X + X^2$.
Donc la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Vérifier alors que $\Phi - Id$ est nilpotent.
$\mathrm{Mat}(\Phi - Id) = M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On calcule $(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $(M - I_3)^3 = 0_{33}$.
Ainsi, $(\Phi - Id)^3 = 0$ et $(\Phi - Id)^2 \neq 0$.
Par conséquent, $\Phi - Id$ est un endomorphisme nilpotent d'indice 3 .

(d) Montrer que Φ est un isomorphisme et expliciter $\Phi^{-1}\left(a+bX+cX^2\right)$.
Puisque la matrice de Φ est inversible d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que Φ est un isomorphisme.
De plus :

$\Phi^{-1}\left(a+bX+cX^2\right)$
$= a\Phi^{-1}(1)+b\Phi^{-1}(X)+c\Phi^{-2}\left(X^2\right)$
$= a1+b(-1+X)+c(4-4X+X^2)$
$= a-b+4c+(b-4c)X+cX^2$

(e) Chercher alors une solution polynomiale de l'équation :

$$xy''+y'+y=x^2.$$

Cela revient à résoudre :

$$\Phi(P)=X^2 \Leftrightarrow P=\Phi^{-1}\left(X^2\right)=4-4X+X^2.$$

Finalement, une solution polynomiale est :

$$x \mapsto x^2-4x+4$$

PARTIE B.

Dans un espace de dimension n avec un endomorphisme nilpotent d'indice 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n strictement supérieure à 1 .
On considère un endomorphisme f de E nilpotent d'ordre 2 , donc non-nul et vérifiant :

$$f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On note r le rang de f et k la dimension du noyau de f.

1. (a) f est-il bijectif ? On pourra raisonner par l'absurde.
Si f était bijective et f est nilpotent d'ordre 2 alors :

$$f^{-1}\circ f\circ f = f^{-1}\circ 0_{\mathscr{L}(E)} \Rightarrow f=0_{\mathscr{L}(E)}$$

Ceci est absurde et l'application f n'est pas bijective.

(b) Démontrer que Imf $\subseteq \ker f$.
Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$.
Alors, il existe $x \in E$ tel que $f(x)=y$.
Puis on calcule $f(y)$ (on doit montrer que y appartient au noyau de f) :

$$f(y)=f(f(x))=f^2(x)=0_E$$

Ainsi, $y \in \ker(f)$.
On a donc démontré que $\operatorname{Im}(f)\subset\ker(f)$.

(c) En utilisant le théorème du rang, en déduire que :

$$r \leq \frac{n}{2} \text{ et } k \geq \frac{n}{2} \cdot (*)$$

Par l'inclusion précédente, $rg(f) \leq \dim(\ker(f)) \Leftrightarrow r \leq k$.
De plus, par le théorème du rang, on sait que :

$$rg(f) + \dim(\ker(f)) = n \Leftrightarrow r + k = n$$

Ainsi, $2r \leq k + r \Leftrightarrow r \leq n/2$ et $r + k \leq 2k \Leftrightarrow n/2 \leq k$.

(d) Pourquoi r ne peut-il pas être nul ? On pourra raisonner par l'absurde.
Supposons que r soit nul. Alors $\text{Im}(f) = \{0_E\}$.
Donc f est l'application nulle, ce qui est absurde par hypothèse.
Donc $r \neq 0$.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

(a) Justifier que $Im(f) = \ker f$ en utilisant notamment $(*)$.
On sait que :

- $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$
- $r \leq 1$ et $2 \geq k \geq 1$.
- $r + k = 2$

Or r n'est pas nul. Donc r est égal à 1 et k également.
Donc, $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ ont la même dimension.
Donc, par propriété : $\text{Im}(f) = \ker(f)$

(b) Soit u un vecteur non-nul appartenant à Imf et v un vecteur tel que $f(v) = u$.
Démontrer que la famille $(u; v)$ est une base de E.
On montre que la famille est libre.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda u + \mu v = 0_E$.
Alors $\lambda u + \mu f(u) = 0_E$.
Appliquons alors f :

$$f(\lambda f(v) + \mu v) = f(0_E)$$

Puisque f est linéaire :

$$\lambda f^2(u) + \mu f(v) = 0_E \Rightarrow \mu u = 0_E \Rightarrow \mu = 0$$

car u est non nul par hypothèse.
Puis, $\lambda u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_E$ car u est non nul.
On a donc montré que $(u; v)$ est libre.
La famille est libre et son cardinal est égal à la dimension de E, la famille est donc de cardinal maximal.
Par propriété, $(u; v)$ est donc une base de E.

(c) Donner alors la matrice de f dans la base $(u;v)$.
Par définition : $\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : on retrouve les résultats de la question (1) partie A .