Programme de khôlle 18

Semaine du 15 février 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2+e^{-2n}+2n}{ln(2n)+2n-1}$
2. $u_n = (n+3ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = ln(\frac{n^2+1}{n^2+2})$
4. $u_n = sin(\frac{2}{n^3})ln(1+\frac{4}{n^2})$
5. $u_n = e^{sin(\frac{2}{n^3})} - 1$
6. $u_n = n(\sqrt[3]{1+tan(\frac{3}{n^2})} - 1)$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *On considère la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. *Montrer que*

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et en déduire que :

$$S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n$$

2. *En déduire la limite de la suite (S_n).*
3. *Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.*
   (a) *Montrer que (u_n) est décroissante.*
   (b) *Montrer que (u_n) est minorée par -2.*
   (c) *En déduire que (u_n) est convergente.*

4. *Déterminer la limite de* $\frac{u_n}{\sqrt{2n}}$. *Et en déduire un équivalent simple de* S_n.

Exercice 2.2. 1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

2. *On considère la suite* (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$.
   (a) *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{n}$. *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique.*
   (b) *Exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de* n.
   (c) (u_n) *est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.*

Exercice 2.3. *On considère la fonction* f *définie sur* $I = [0;1]$ *par :*

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}.$$

On définit une suite (u_n) *par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Étudier les variations de la fonction* f *et en déduire que* $f(I) \subset I$.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
3. *Première méthode.*
   (a) *Établir la relation* $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ *et en déduire le sens de variation de la suite.*
   (b) *Démontrer que la suite* (u_n) *est convergente.*
4. *Deuxième méthode.*
   On définit la suite (v_n) *de terme général* $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   (a) *Démontrer que* (v_n) *est géométrique de raison* $\frac{2}{5}$.
   (b) *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de* n.
   (c) *En déduire la convergence de la suite* u_n *ainsi que sa limite.*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.27 : Généralités sur les suites réelles

1. Modes de définition d'une suite.
2. Opérations sur les suites.
3. Encadrement et variations d'une suite.
3.1 Suites minorées, majorées et bornées.
3.2 Monotonie d'une suite.
4. Suites arithmétiques et géométriques.

Chap.28 : Limite d'une suite réelle

1. Limite d'une suite
2. Opérations sur les limites de suite

3. Théorèmes d'existence d'une limite
3.1 Encadrement et limite
3.2 Théorème de la limite monotone
3.3 Suites adjacentes

Chap.29 : Comparaison de suites

1 Relation de comparaison
1.1 Relation de domination
1.2 Négligeabilité
1.3 Équivalence
2. Équivalents usuels
3. Application au calcul de limite