TSI2

Stage
Fiche 2
Applications linéaires (Définitions)

Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image. Préciser alors si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=x+y+2z$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x+y+1$
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\cos(x)$
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y)=(0,2x+y,x+3y)$

Exercice 2
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+y,x-y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3
On considère les applications

$$\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \\ (x,y)\to(x,2x+y,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y,z)\to(x+y,5x-2y+z) \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires .
2. Déterminer Ker f , ker g , Im f et Im g . Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que $g\,o\,f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$

Exercice 4

Soit $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}^3 \\ P\to(P(-1),P(0),P(1)) \end{array}$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$

Exercice 5
soit $\begin{array}{c} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4 \\ (x,y,z)\to(x+y,y-x,z+y,x+y+2z) \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de Im f
3. Déterminer une base de ker f
4. L'application f est -elle injective ? Surjective ?

Exercice 6
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que $f\,o\,g=g\,o\,f$. Montrer que ker(f) et Im(f) sont stables par g .