Programme de khôlle 4

Semaine du 2 octobre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Calculer en utilisant une intégration par partie :
   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \, \mathrm{d}t$
   (b) $\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t$
   (c) $\int_0^1 t\arctan t \, \mathrm{d}t$
2. Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.
   (a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, \mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$.
   (b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \, \mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$.
   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t \, \mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *On pose, pour tout* $(x;y) \in \mathbb{K}^2, p(x;y) = \frac{1}{5}(x+2y; 2x+4y)$.

1. *Montrer que* p *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer une base de* $G = \ker(p)$ *et une base de* $F = \mathrm{Im}(p)$.
3. *Montrer que* $p \circ p = p$. *Qu'en conclure ?*
4. *Exprimer la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G.

Exercice 2.2. *On pose* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}((-1,2,1))$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires.*
2. *Déterminer l'expression de la projection sur* F *parallèlement à* G.
3. *Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à* G *parallèlement à* F.

Exercice 2.3. *Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ représentée dans la base canonique $\mathscr{B}$ par :*

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, -1, 1), e_2 = (1, 1, -1), e_3 = (-1, -1, -1)$.*
   (a) *Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Expliciter les trois vecteurs de la base canonique comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{C}$.*
2. *Déterminer la matrice T de f dans cette nouvelle base.*
3. *Calculer T^n.*
4. *En déduire la matrice de f^n dans la base canonique.*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.2 : Applications linéaires

1 Définitions
2 Noyau et image
3 Représentation matricielle
4 Sous-espaces stables par un endomorphisme
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel
5.1 Projecteurs
5.2 Symétries.

Chap.3 : Intégrales : rappels et généralisation

1 Rappels sur les intégrales d'une fonction continue sur un segment
1.1 Définition et lien avec les primitives
1.2 Propriétés de l'intégrale
1.3 Intégration par partie et changement de variable
1.4 Sommes de Riemann, théorème de la moyenne

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

3 Extension de la notion d'intégrale
3.1 Sur un intervalle du type $[a; b[$ ou $]a; b]$