

# Chap.1 : Compléments d'algèbre linéaire

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et compléments sur les matrices</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Généralités sur les espaces vectoriels</b>	<b>7</b>
2.1	Définition . . . . .	7
2.2	Familles de vecteurs . . . . .	8
2.2.1	Combinaisons linéaires, sous-espace engendré . . . . .	8
2.2.2	Familles génératrices . . . . .	9
2.2.3	Familles libres . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Généralités sur les sous-espaces vectoriels</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Dimension d'un espace vectoriel</b>	<b>14</b>
4.1	Définition . . . . .	14
4.1.1	Base . . . . .	14
4.1.2	Dimension . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Somme de sous-espaces vectoriels</b>	<b>20</b>
5.1	Deux sous-espaces vectoriels . . . . .	20
5.1.1	En dimension quelconque . . . . .	20
5.1.2	En dimension finie . . . . .	21
5.2	Plusieurs sous-espaces vectoriels . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Hyperplans</b>	<b>23</b>

La plupart des notions de ce chapitre sont des notions vues en première année. Aucun des résultats de TSI 1 ne sera démontré dans ce chapitre, libre à vous de retrouver les démonstrations manquantes dans votre cours de première année. Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps des scalaires et il sera égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$n$  et  $p$  désigneront deux entiers naturels non nuls.

## 1 Rappels et compléments sur les matrices

### Notations :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  désigne l'ensemble des matrices possédant  $n$  lignes et  $p$  colonnes et dont les coefficients appartiennent à  $\mathbb{K}$ .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  désigne l'ensemble des matrices carrées possédant  $n$  lignes et  $n$  colonnes et dont les coefficients appartiennent à  $\mathbb{K}$ .

### Définition 1.1.

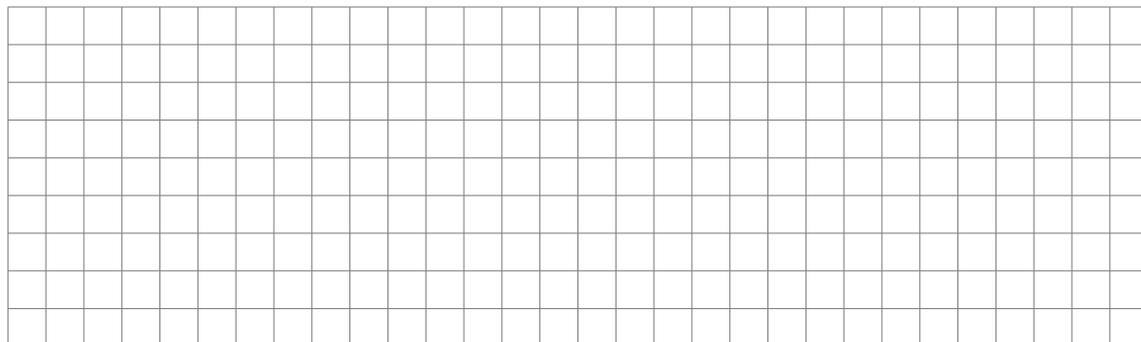
Soient  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{kl}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$  est la matrice  $AB = (c_{il}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  avec :

$$c_{il} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl}$$

Attention en général :  $AB \neq BA$ .

**Application 1.2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A \times B$ .



**Définition 1.3.** Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **inversible** s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$AB = BA = I_n$$

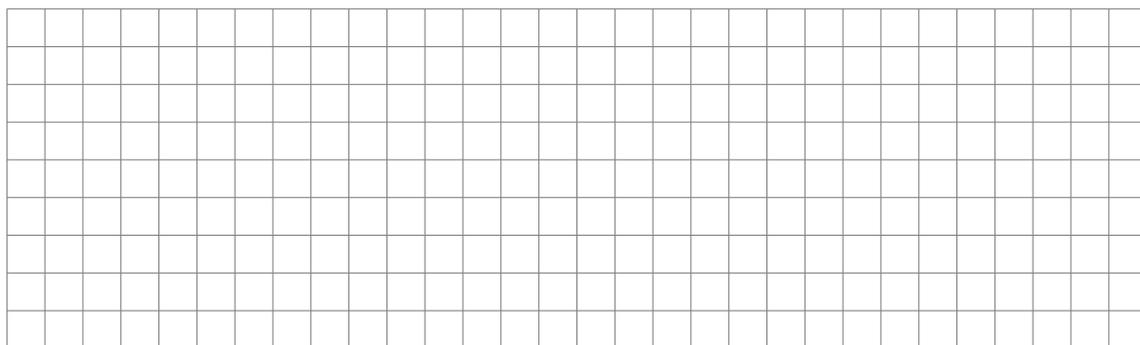
L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est noté  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**Méthode 1.4.** A ce stade de l'année nous disposons de deux méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse :

- Grâce à une indication de l'énoncé de l'exercice trouver une matrice  $B$  telle que  $A \times B = B \times A = I_n$ .
- Utiliser la matrice augmentée  $(A \mid I_n)$  et à l'aide d'opérations sur les lignes se ramener à  $(I_n \mid A^{-1})$ .

**Application 1.5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A^2 = 2I_3 - A$
2. En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .



**Application 1.6.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$  est-elle inversible ? Si c'est le cas, déterminer son inverse.



**Proposition 1.7.** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors  $A \times B$  est une matrice inversible et on a :

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

### Formule du binôme

**Théorème 1.8.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = BA$  (on dit que  $A$  et  $B$  **commutent**). Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

**Application 1.9.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  et soit  $n$  un entier. Nous allons déterminer une expression de  $A^n$ .

1. Démontrer que  $A$  peut s'écrire  $3I_2 + B$ , avec  $I$  matrice unité et  $B$  à déterminer.
2. Démontrer que  $B^n = 0$  pour  $n \geq 2$ .
3. Déterminer une expression de  $A^n$ .



**Définition 1.10.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- On appelle **noyau** de la matrice  $A$ , et on note  $\text{Ker}(A)$ , l'ensemble :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0_{n,1}\} \subset \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

- On appelle **image** de la matrice  $A$ , et on note  $\text{Im}(A)$ , l'ensemble :

$$\text{Im}(A) = \{AX / X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

**Application 1.11.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $\text{ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$ .



**Définition 1.12.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  et  $B$  sont **semblables** si, et seulement si il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible et telle que  $A = PBP^{-1}$ .

**Définition 1.13.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée.

On appelle **trace** de  $A$ , et on note  $\text{tr}(A)$ , le scalaire égal à la somme des éléments diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Exemple 1.14.** • Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors, on a

$$\text{tr}(A) = 2 + 1 + 0 = 3.$$

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(I_n) = n$

**Proposition 1.15.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

**Remarque 1.16.** La deuxième égalité vient du fait que, même si  $AB \neq BA$  en général,  $AB$  et  $BA$  ont les mêmes éléments diagonaux.

**Proposition 1.17.** Deux matrices semblables ont la même trace.

**Preuve :**



**Définition 1.18.** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle **transposée** de  $A$  et on note  $A^T$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  défini par :

$$A^T = (a_{j,i})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$$

**Application 1.19.** Écrire les transposées des matrices suivantes :

- Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , on a :  $A^T =$ .
- Soit  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , on a :  $B^T =$ .
- Soit  $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ , on a :  $C^T =$

**Définition 1.20.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- Lorsque  $A^T = A$  on dit que  $A$  est une matrice **symétrique**.
- Lorsque  $A^T = -A$  on dit que  $A$  est une matrice **antisymétrique**.

**Exemple 1.21.** La matrice  $C$  de l'exemple précédent est une matrice symétrique.

**Proposition 1.22.** •  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$  et  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  :

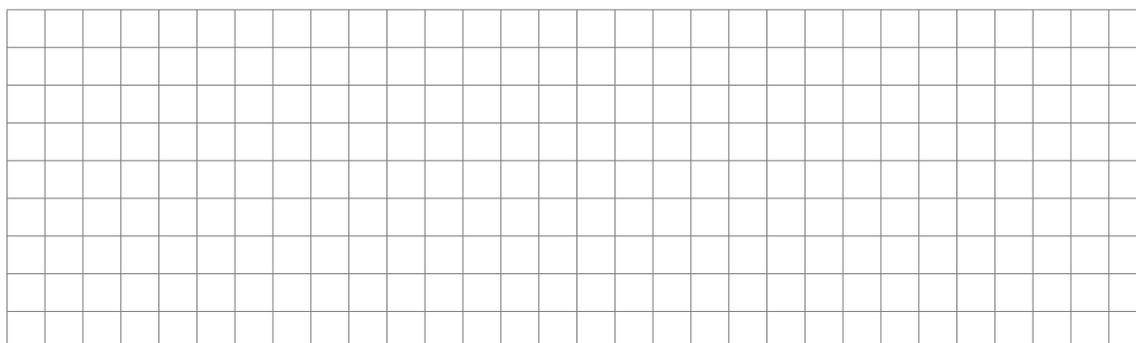
$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\forall B \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{K})$ ,  $(AB)^T = B^T \times A^T$
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible alors  $A^T$  est inversible et :

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

- $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

**Preuve :**



## 2 Généralités sur les espaces vectoriels

### 2.1 Définition

**Définition 2.1.** Soit  $E$  un ensemble muni d'une opération d'addition notée  $+$  et d'une opération de multiplication par un réel notée  $\cdot$ . On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** lorsque :

- $(E, +)$  est un groupe commutatif, c'est-à-dire :
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} \in E$ . (Loi interne)
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ . (Associativité)
  - $\exists \vec{0}_E \in E$  tel que  $\forall \vec{u} \in E, \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u}$ . (Élément nul)
  - $\forall \vec{u} \in E, \exists \vec{v} \in E$ , tel que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}_E$ . (on notera  $\vec{v} = -\vec{u}$ ) (Opposé)
  - $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ . (Commutativité)
- l'opération  $\cdot$  vérifie :
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{ et } \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot \vec{u} \in E$ .
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{u} \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$ .
  - $\forall \vec{u} \in E, 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall \vec{u} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

**Remarque 2.2.** En pratique on utilise presque jamais cette définition pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Nous verrons comment répondre à ce genre de question dans la partie suivante.

Cette définition sert surtout à comprendre quelles sont les opérations autorisées sur les éléments d'un espace vectoriel.

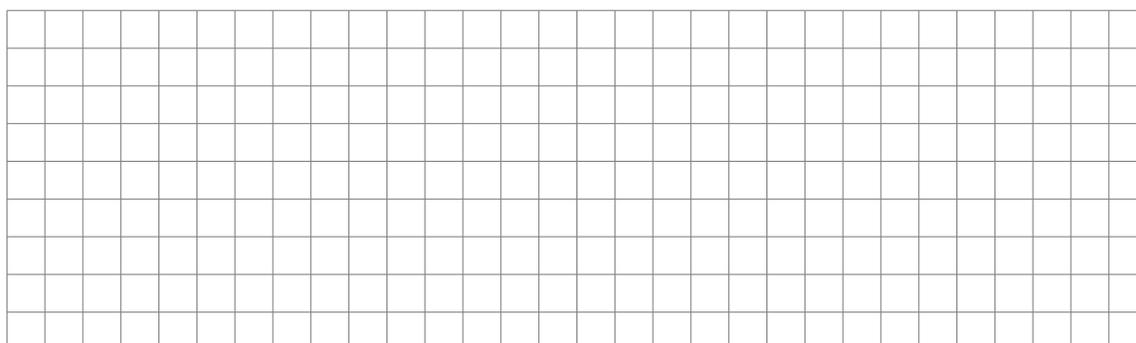
Dans tout le chapitre  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et on dira tout simplement  $E$  est un espace vectoriel.



**Exemple 2.8.**  $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k, \dots) = \text{Vect}(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Application 2.9.** Considérons l'ensemble  $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

Écrire  $E$  comme l'ensemble des combinaisons linéaire d'une famille de matrices.



### 2.2.2 Familles génératrices

**Définition 2.10.** Soit  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$  une famille (finie ou non) de vecteurs de  $E$ . On dit que la famille  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$  est **génératrice** de  $E$ , ou encore engendre  $E$ , si, et seulement si, on a  $E = \text{Vect}(\vec{u}_i)_{i \in I}$ .

**Exemple 2.11.** • On remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n[X] &= \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n / (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\} \\ &= \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) \end{aligned}$$

Donc la famille  $(1, X, \dots, X^n)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

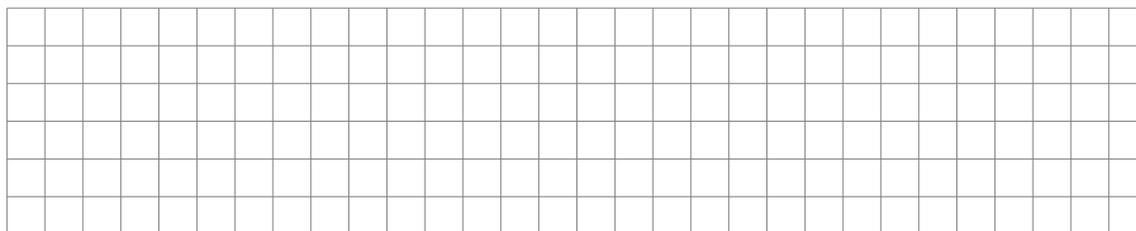
- De même, la famille infinie  $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Méthode 2.12.** Je dois savoir trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel  $E$  : il suffit pour cela d'écrire  $E$  sous la forme  $\text{Vect}(\dots)$  donc c'est exactement la même méthode que le point précédent.

**Application 2.13.** Considérons l'ensemble :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = P'(2) = 0\}.$$

Trouver une famille génératrice de  $E$ .



**Proposition 2.14.** *Si  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$  alors :*

- pour tout  $\vec{u} \in E$ ,  $(\mathcal{F}, \vec{u})$  est aussi une famille génératrice de  $E$
- si on change l'ordre des vecteurs de la famille  $\mathcal{F}$  alors la famille reste une famille génératrice de  $E$
- si on multiplie un ou plusieurs vecteurs de  $\mathcal{F}$  par un scalaire non nul alors la nouvelle famille est aussi génératrice de  $E$ .

**Exemple 2.15.**  $\text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 3))$

$= \text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 1))$  on multiplie le dernier vecteur par  $\frac{1}{3}$   
 $= \text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 1))$  inutile de garder deux fois le même vecteur  
 $= \text{Vect}((1, 1), (3, 1), (1, 2))$  modification de l'ordre  
 $= \text{Vect}((1, 1), (3, 1), (1, 2), (4, 2))$  on peut ajouter dans la famille n'importe quel vecteur combinaison linéaire des autres.

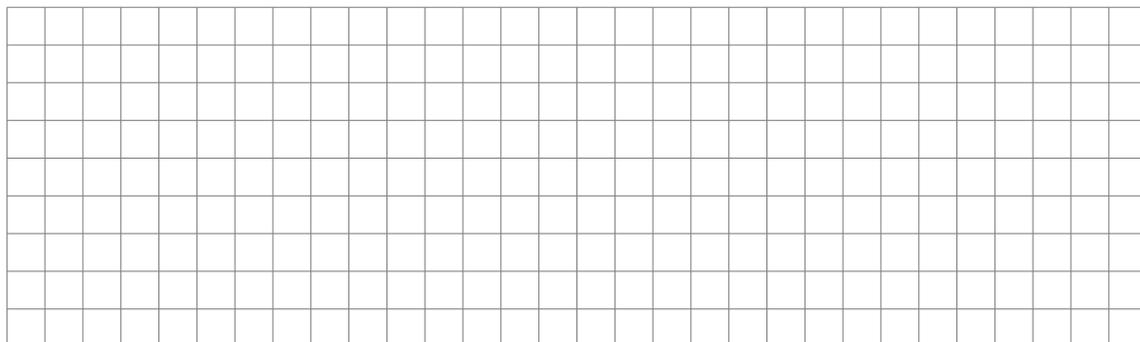
### 2.2.3 Familles libres

**Définition 2.16.** • Une famille finie  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$  de vecteurs de  $E$  est dite **libre** si, et seulement si, pour tout  $p$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$  on a :

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$$

- Une famille infinie  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite **libre** si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre.  
Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

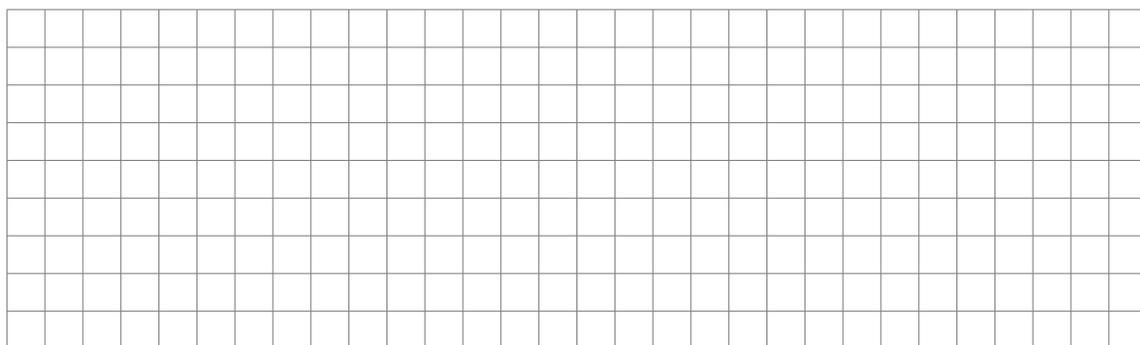
**Application 2.17.** La famille  $(1 + X + X^2, 3 + X + 5X^2, 2 + X + 3X^2)$  est-elle une famille libre ou liée de  $\mathbb{R}[X]$ ?



**Application 2.18.** On considère la famille  $(f, g, h)$  composée de trois fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par :

$$f : x \mapsto \sin(x) \quad g : x \mapsto \cos(x) \quad h : x \mapsto \sin(2x)$$

Montrer que cette famille est libre.



**Application 2.19.** On considère  $E$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $f_a$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_a(x) = |x - a|.$$

Montrer que la famille infinie  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$  est libre.



**Proposition 2.20.** Soit  $E$  un espace vectoriel.

- Si on change l'ordre des vecteurs d'une famille libre (resp. liée), on obtient encore une famille libre (resp. liée).
- Une famille contenant un seul vecteur est libre si, et seulement si, le vecteur est non nul.
- La famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  est liée si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$  ou  $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$ . On dit alors que les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont **colinéaires**.
- Une famille contenant 3 vecteurs est libre si, et seulement si, les vecteurs ne sont pas coplanaires.
- Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
- Toute famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.
- Soit  $\mathcal{F}$  une famille libre de  $E$  et  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$ . La famille  $(\mathcal{F}, \vec{u})$  est liée si, et seulement si,  $\vec{u}$  est combinaison linéaire de la famille  $\mathcal{F}$ .

Il est aussi important de connaître cette propriété sur les familles de polynômes :

**Proposition 2.21.** Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une famille de polynômes non nuls tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) < \deg(P_{k+1}) \text{ (échelonnée en degrés).}$$

Alors cette famille est libre.

**Exemple 2.22.** On peut affirmer, sans démonstration, que la famille

$$\{1, X^5 + 2X^3, X^2 + 1, X^4\}$$

est libre car, en la réordonnant, on peut obtenir une famille de polynômes échelonnée en degrés.

### 3 Généralités sur les sous-espaces vectoriels

**Définition 3.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un ensemble. On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si et seulement si :

- $F$  est un sous-ensemble de  $E$
- $F$  est non vide
- pour tout couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  de vecteurs de  $F$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \vec{u} + \vec{v}$  est un vecteur de  $F$

**Proposition 3.2.** Si  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  alors  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Proposition 3.3.** Soit  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$  une famille (finie ou non) de vecteurs de  $E$ . Alors le sous-espace engendré  $\text{Vect}(\vec{u}_i)_{i \in I}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Méthode 3.4.** Il faut savoir montrer qu'un ensemble  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné ou classique. Il existe deux principales méthodes :

- utiliser la définition
- écrire l'ensemble sous la forme  $\text{Vect}(\dots)$  et conclure grâce à la propriété précédente.

**Application 3.5.** Montrer, en utilisant les deux méthodes, que l'ensemble  $E = \{aX^2 + 2aX + 3b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .



**Méthode 3.6.** Pour montrer qu'un ensemble  $E$  est un espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel classique.

**Application 3.7.** On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  est un espace vectoriel.



**Proposition 3.8.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Attention :** ce n'est en général pas vrai pour la réunion de deux sous-espaces.

## 4 Dimension d'un espace vectoriel

### 4.1 Définition

#### 4.1.1 Base

**Définition 4.1.** On appelle **base** de  $E$  toute famille à la fois libre et génératrice de  $E$ .

Par conséquent, la famille  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  si, et seulement si, tout vecteur de  $E$  peut s'écrire, de manière unique, comme une combinaison linéaire de la famille  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ .

Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les **coordonnées du vecteur** dans la base  $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ .

**Définition 4.2.** Soit  $E$  un espace vectoriel et soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$ .

Soit  $\vec{u} \in E$ , on considère  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  est appelée la **matrice colonne des coordonnées** de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Méthode 4.3.** Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée.

Pour trouver les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$  il faut trouver les réels  $(a_i)_{i \in I}$  tels que :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} a_i \vec{e}_i$$

c'est donc exactement la même méthode que pour savoir si  $\vec{u}$  est une combinaison linéaire de la famille  $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ .

La matrice colonne des coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$  se note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$

et elle est égale à  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ .

**Application 4.4.** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  muni de la base  $\mathcal{B} = (R_0, R_1, R_2)$  où  $R_0 = 1, R_1 = X + 2$  et  $R_2 = X^2 - 2$ .

On considère le polynôme  $P = 4X^2 - 3X - 12$ . Quelle est la matrice colonne des coordonnées de  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ ?



**Définition 4.5.** Soient  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , et on note  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ , la matrice dont la  $j^{\text{ème}}$  colonne contient les coordonnées de  $\vec{f}_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

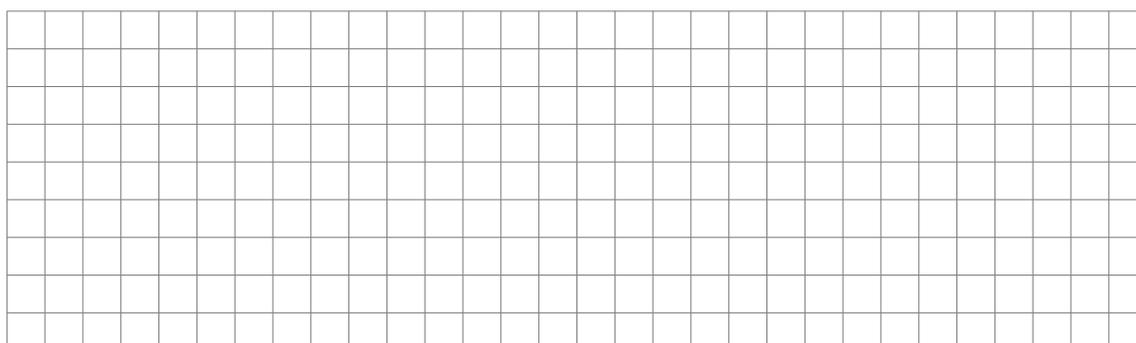
**Méthode 4.6.** Construire une matrice de passage.

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$  sont deux bases alors pour construire la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  je mets dans la  $j^{\text{ème}}$  colonne les coordonnées du vecteur  $f_j$  dans la bases  $\mathcal{B}$ .

**Application 4.7.** Soient  $\mathcal{B}_1 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ , et  $\mathcal{B}_2 = (R_0, R_1, R_2, R_3)$ , avec :

$$R_0(X) = 1, R_1(X) = X - 1, R_2(X) = (X - 1)^2, R_3(X) = (X - 1)^3$$

une autre base de cet espace. Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ .



**Proposition 4.8.** Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est une matrice inversible et :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

**Proposition 4.9.** On considère  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de l'espace vectoriel  $E$  et  $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Pour tout  $\vec{u} \in E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{u})$$

Dans certains des espaces vectoriels classiques certaines bases sont à connaître par coeurs. Ce sont des bases dites **canoniques**.

### Bases canoniques usuelles

**Théorème 4.10.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$   $i$ ème place La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .
- Soient  $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ , on note  $E_{ij}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne qui vaut 1. La famille  $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots, E_{2p}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{np})$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on pose  $P_i(X) = X^i$  La famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- La famille infinie  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ .

Sur l'ensemble des polynômes on possède aussi cette propriété qui permet d'éviter quelques calculs :

**Proposition 4.11.** Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille de polynômes non nuls tels que  $\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) = k$  Alors  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Exemple 4.12.** La famille  $\left((X-2)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$

### 4.1.2 Dimension

**Définition 4.13.** On dit que  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie.

**Théorème 4.14.** Tout espace vectoriel non réduit à  $\{0\}$  de dimension finie admet une base.

### Dimension d'un espace-vectoriel

**Théorème 4.15.** Soit  $E$  un espace de dimension finie non réduit à  $\{0\}$ . Alors toutes les bases de  $E$  ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé **dimension de l'espace vectoriel  $E$**  et est noté  $\dim(E)$ . Par convention on dira que l'espace  $\{0\}$  est de dimension 0.

### Dimensions des espaces vectoriels de référence

**Théorème 4.16.** •  $\dim(\mathbb{K}^n) = n$

- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
- $\mathbb{K}[X]$  est de dimension infinie.

**Proposition 4.17.** Soit  $E$  un espace de dimension finie  $n$  :

- Toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .
- Toute famille libre génératrice de  $n$  vecteurs est une base de  $E$
- Toute famille libre possède au plus  $n$  vecteurs.
- Toute famille génératrice possède au moins  $n$  vecteurs.

**Conséquence :** Dans un espace de dimension  $n$ , toute famille de strictement plus de  $n$  vecteurs est donc forcément liée et toute famille de strictement moins de  $n$  vecteurs n'est jamais génératrice.

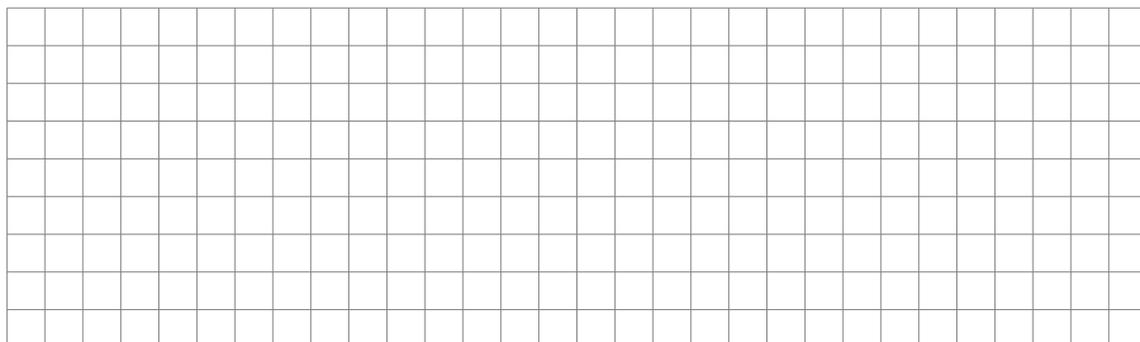
### Théorème de la base incomplète

**Théorème 4.18.** Soit  $E$  un espace de dimension finie  $n$  et  $(e_1, \dots, e_k)$  une famille libre de  $E$ . Alors il existe des vecteurs  $e_{k+1}, \dots, e_n$  tels que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

**Théorème 4.19.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace de  $E$ . Alors  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ . De plus :

$$\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$$

**Application 4.20.** Soient  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $F = \text{Vect}(3, X - 1, (X - 4)^2)$ . Démontrer que  $E = F$ .



**Définition 4.21.** Soit  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . On appelle **rang** de cette famille, et on note  $\text{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ , la dimension de l'espace vectoriel  $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ .

**Méthode 4.22.** Montrer qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel.

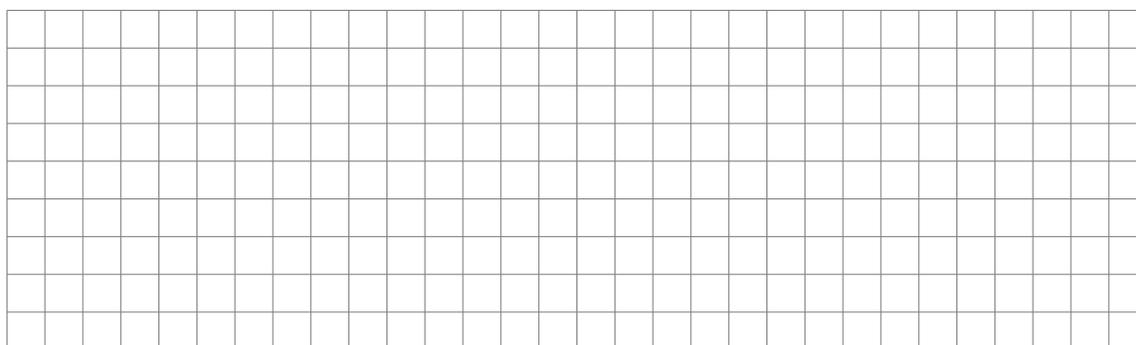
On dispose de deux méthodes :

- **Méthode 1** : s'applique lorsqu'on ne connaît pas la dimension de  $E$ . On montre que la famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice de  $E$ .
- **Méthode 2** : elle s'applique lorsqu'on connaît la dimension de  $E$ . On montre que  $\mathcal{B}$  est une famille libre (ou génératrice) de  $E$  puis on dit : " la famille  $\mathcal{B}$  est une famille libre (resp. génératrice) telle que  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E) = n$  donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ ."

**Application 4.23.** Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

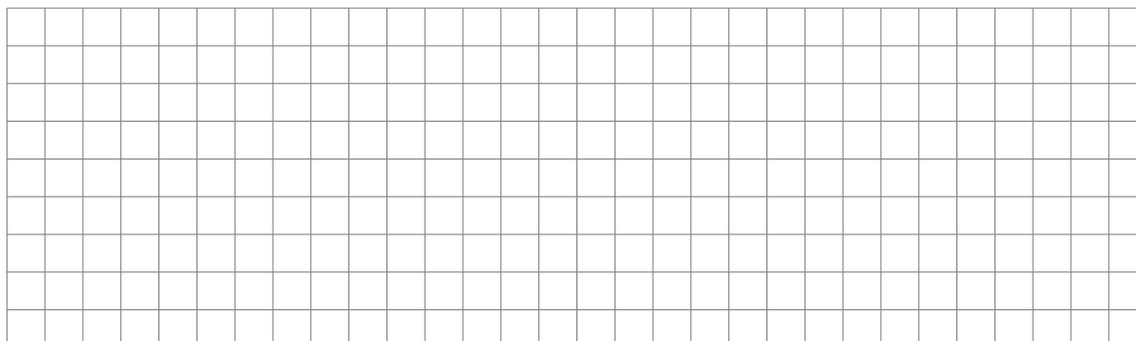


**Méthode 4.24.** Trouver une base d'un espace vectoriel donné.

On commence par trouver une famille génératrice de  $E$  (voir méthode sur les familles génératrices), puis on montre que cette famille est libre. Enfin on conclut.

**Application 4.25.** Déterminer une base de l'espace-vectoriel

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

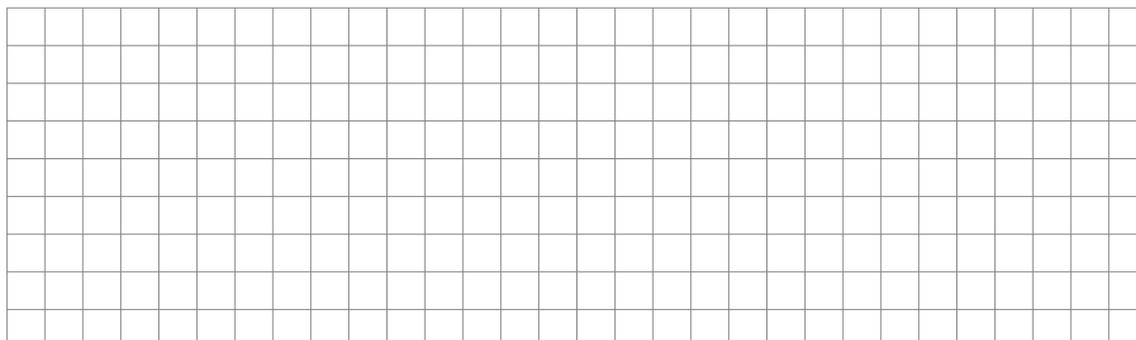


**Méthode 4.26.** Calculer la dimension d'un espace vectoriel donné.

- S'il s'agit d'un espace vectoriel classique, on utilise les résultats du cours
- S'il s'agit d'un nouvel espace vectoriel défini dans l'énoncé de votre exercice alors LA SEULE MÉTHODE possible consiste à trouver une base puis compter le nombre de vecteurs dans la base. Ce nombre est la dimension cherchée.

**Application 4.27.** Déterminer la dimension de l'espace vectoriel

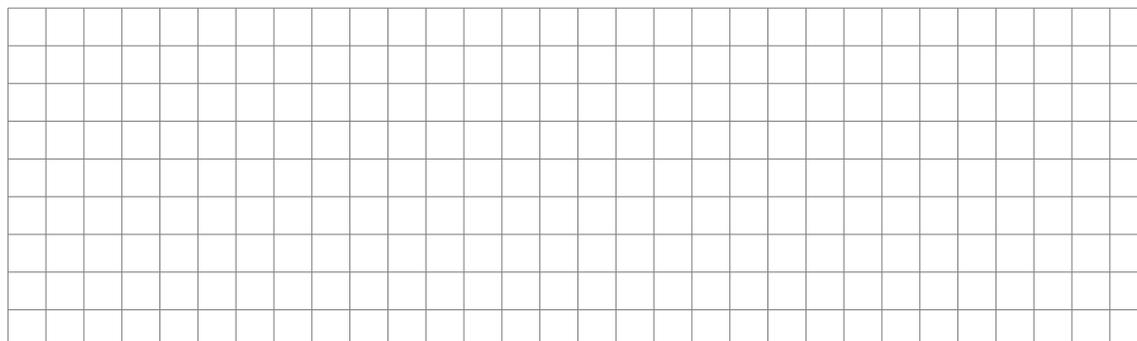
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}.$$



**Méthode 4.28.** Calculer le rang d'une famille de vecteurs

Il faut poser  $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  et calculer la dimension de  $F$ .

**Application 4.29.** On pose  $P = 2X + 1$ ,  $Q = X^2 + 1$  et  $R = 2X^2 + 2X + 3$   
Quel est le rang de la famille  $\{P, Q, R\}$  de  $\mathbb{R}[X]$ ?



## 5 Somme de sous-espaces vectoriels

### 5.1 Deux sous-espaces vectoriels

#### 5.1.1 En dimension quelconque

**Définition 5.1.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . L'ensemble  $\{\vec{f} + \vec{g}, (\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé **somme** de  $F$  et  $G$  et noté  $F + G$

**Définition 5.2.** On dit que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont en **somme directe** si tout vecteur de  $F + G$  se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$ . On notera alors  $F \oplus G$  au lieu de  $F + G$ .

**Proposition 5.3.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont en somme directe si, et seulement si,  $F \cap G = \{0_E\}$ .

**Définition 5.4.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires** dans  $E$  si, et seulement si, tout vecteur  $\vec{u}$  de  $E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$  avec  $(\vec{f}, \vec{g}) \in F \times G$ . On dit alors que  $E$  est somme directe de  $F$  et  $G$ , et on note :

$$E = F \oplus G.$$

**Proposition 5.5.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

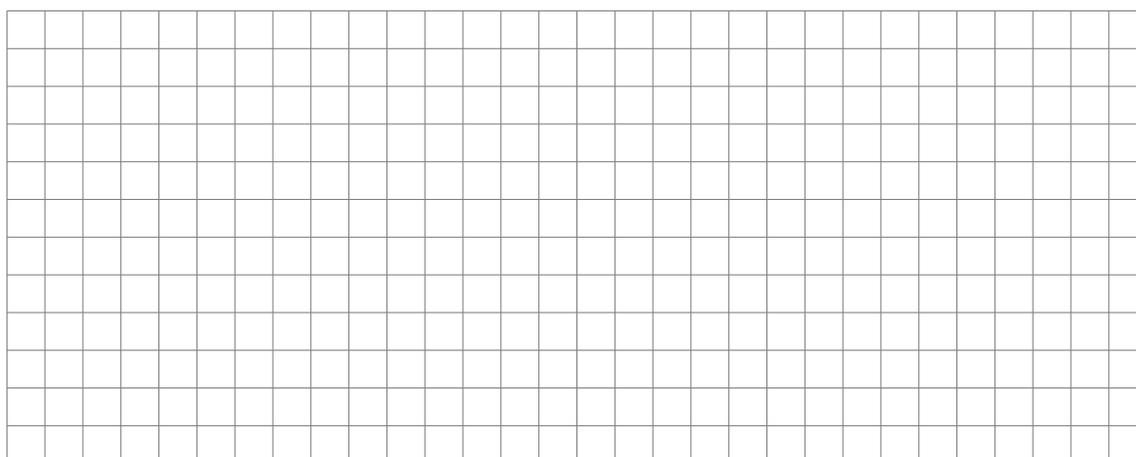
1.  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ;
2.  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $E = F + G$ .

**Application 5.6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .



**Application 5.7.** On considère  $\mathcal{F}$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $I$  le sous-espace vectoriel des fonctions impaires et  $P$  le sous-espace vectoriel des fonctions paires. Montrer que  $P$  et  $I$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{F}$ .



### 5.1.2 En dimension finie

On se place dans un espace  $E$  de dimension finie.

#### Formule de Grassman

**Théorème 5.8.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Grâce à cette formule on dispose, en dimension finie, de méthodes supplémentaires pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :

**Proposition 5.9.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ;
2.  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $E = F + G$  ;
3.  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$  ;
4.  $E = F + G$  et  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ .

**Proposition 5.10.** • Si  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base de  $F$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  est une base de  $G$  et que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $E$  alors la famille  $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_p)$  est une base de  $E$ . On dit que c'est une **base adaptée** à la somme directe  $F \oplus G$ .

- Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  alors

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \text{ et } G = \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$$

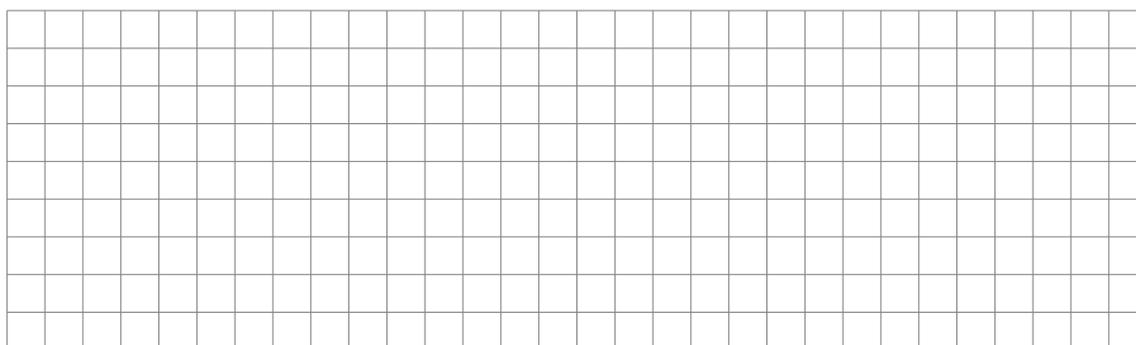
sont supplémentaires.

**Application 5.11.** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  et on considère les deux sous-espaces vectoriels suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .



## 5.2 Plusieurs sous-espaces vectoriels

**Définition 5.12.** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On appelle **somme** des sous-espaces  $(F_1, \dots, F_p)$  le sous-espace vectoriel :

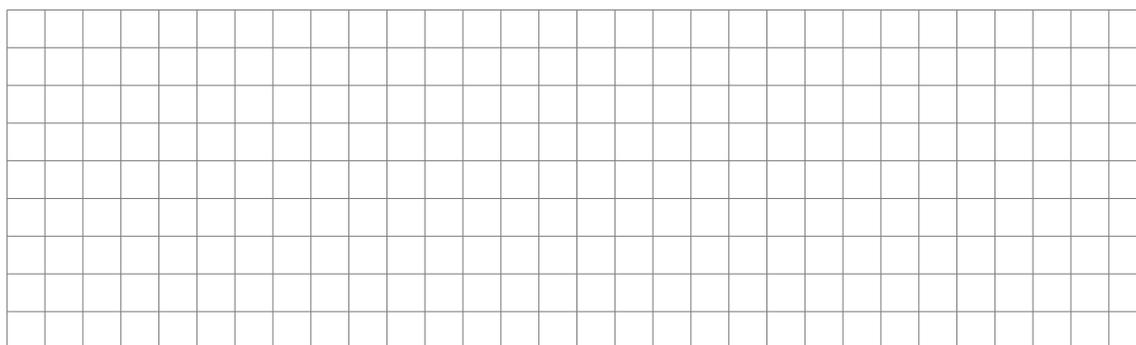
$$F = \sum_{i=1}^p F_i = F_1 + \dots + F_p = \left\{ \vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_p / \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \vec{f}_i \in F_i \right\}$$

**Définition 5.13.** On dit que la somme  $F = F_1 + \dots + F_p$  est **directe** si tout vecteur de  $F$  se décompose de manière unique comme somme de vecteurs de  $(F_i)_{i=1, \dots, p}$ . On notera alors  $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

**Proposition 5.14.** La somme  $F = \sum_{i=1}^p F_i$  est directe si, et seulement si, pour  $\vec{f}_1 \in F_1, \vec{f}_2 \in F_2, \dots, \vec{f}_p \in F_p$  on a :

$$\vec{f}_1 + \dots + \vec{f}_p = \vec{0} \iff \vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \dots = \vec{f}_p = \vec{0}$$

**Application 5.15.** On se place dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  et on fixe  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ , on pose  $F_k = \text{Vect}(X^k(X-1))$ . Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont en somme directe.



**Proposition 5.16.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

On dit que la famille  $(F_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$  est une **décomposition en somme directe** de  $E$ .

De plus si, pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ , on considère  $\mathcal{B}_i$  une base de  $F_i$ , alors la réunion des bases  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E$ . On dit que c'est une **base adaptée à la décomposition en somme directe**.

## 6 Hyperplans

Dans toute cette partie  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  finie.

**Définition 6.1.** On dit qu'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un **hyperplan** de  $E$  si, et seulement si, il est de dimension  $n - 1$ .

**Proposition 6.2.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $F$  est un hyperplan de  $E$  si, et seulement si, il admet une droite vectorielle comme supplémentaire autrement dit, s'il existe  $\vec{u} \in E, \vec{u} \neq \vec{0}$  tel que :

$$E = F \oplus \text{Vect}(\vec{u}).$$

### Équation d'un hyperplan

**Théorème 6.3.** Soit  $F$  un hyperplan de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors il existe des scalaires  $a_1, \dots, a_n$  non tous nuls tels que :

$$\vec{x} \in F \iff a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $\vec{x}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . La relation

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

s'appelle **l'équation de l'hyperplan  $F$**  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Remarque 6.4.** Lorsque la base  $\mathcal{B}$  est fixé, les scalaires  $a_1, \dots, a_n$  ne sont pas uniques mais ils sont définis à une constante multiplicative près.

**Application 6.5.** Montrer que  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) + P'(0) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_2[X]$  et en donner une équation.

