Programme de khôlle 20

Semaine du 19 février 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2
1	1/12	0	1/12
2	2/12	1/12	1/12
3	3/12	2/12	1/12

   (a) Vérifier que l'on dispose bien d'une loi de probabilité.

   (b) Déterminer les lois marginales de X et Y.

   (c) Calculer $E[X]$ et $E[Y]$.

   (d) Calculer V[X] et V[Y].

   (e) Calculer $Cov(X, Y)$.

2. Soient deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	3
0	0,22	0,20	0,00	0,02
1	0,05	0,11	0,04	0,01
2	0,04	0,07	0,02	0,22

   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

   (b) Calculer E[X] et E[Y].

   (c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $\mathrm{Y} = 2$

   (d) Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, puis le coefficient de corrélation.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Déterminer la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la rotation vectorielle d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *et d'axe dirigé par le vecteur* $\vec{u} = (1, 2, 1)$*.*

Exercice 2.2. *Déterminer la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *de la réflexion vectorielle par rapport au plan* F *d'équation* $2x + y - z = 0$*.*

Exercice 2.3. *Soit* E *un espace vectoriel euclidien non réduit à 0 . Soit* $x \in E \backslash \{0\}$*, on considère l'application*

$$\begin{aligned} \phi_x : \quad & E \longrightarrow E \\ & y \longmapsto y - \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *désigne le produit scalaire sur* E*.*

1. *Montrer que* ϕ_x *est une isométrie vectorielle.*
2. *Montrer que* ϕ_x *est une symétrie orthogonale (on précisera* $\operatorname{Ker}(\phi_x - Id)$ *et* $\operatorname{Ker}(\phi_x + Id)$ *).*

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

1 Isométries
1.1 Groupe orthogonal
1.2 Symétrie orthogonale
1.3 Matrices orthogonales
1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3
2.1 Orientation d'un espace vectoriel
2.2 En dimension 2
2.3 En dimension 3

3 Matrices symétriques

Chap.15 : Couples de variables aléatoires, indépendance

1 Généralités sur les couples et vecteurs de VAR finies
1.1 Loi d'un couple
1.2 Lois marginales
1.3 Loi conditionnelle
1.4 Lien entre loi du couple, lois marginales et loi conditionnelle.

1.5 n variables aléatoires

2 Indépendance de V.A.R. finies
2.1 Deux variables
2.2 n variables

3 Somme et produit de deux V.A.R. finies
3.1 Espérance
3.2 Somme de lois de Bernoulli
3.3 Covariance