Interrogation 6 - CORRECTION

Durée : 20 minutes
Calculatrice interdite

Exercice 0.1. 1. *Dans un club de musique regroupant 100 personnes, 65 jouent de la guitare, 40 jouent du piano et 10 ne jouent aucun de ces instruments. Combien de personnes jouent à la fois du piano et de la guitare ?*
Soient E l'ensemble des musiciens de ce club, G l'ensemble des guitaristes et P l'ensemble des pianistes.
Nous cherchons $card(P \cap G)$.
Nous savons que $card(\overline{P \cup G}) = 10$ *donc :*

$card(P \cup G) = card(E) - card(\overline{P \cup G}) = 100 - 10 = 90.$

Par ailleurs : $card(P \cup G) = card(P) + card(G) - card(P \cap G)$ *donc*

$card(P \cap G) = card(P) + card(G) - card(P \cup G) = 40 + 65 - 90 = 15$

Donc 15 personnes jouent à la fois du piano et de la guitare.

2. *Dix personnes sont réunis dans une pièce. Dans cette pièce se trouvent six chaises numérotées. Combien existe-t-il d'occupations possibles de ces six chaises (on suppose qu'elles sont toutes occupées) ?*
Il s'agit de déterminer le nombre de 6-uplets d'éléments distants d'un ensemble de 10 éléments.
Il y a donc $\frac{10!}{(10-6)!} = 151200$ *occupations possibles des chaises.*

Exercice 0.2. *Soit l'application* $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ *définie par :*

$$f(x) = \frac{8x+1}{4x+1}.$$

Démontrer que f *est une bijection de* $\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\}$ *sur* $\mathbb{R} - \{2\}$ *et expliciter l'application réciproque.*

Soit $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, on cherche $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\}$ tel que $y = f(x)$.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{8x+1}{4x+1} \Leftrightarrow y(4x+1) = 8x + 1 \Leftrightarrow 4yx - 8x = 1 - y$
$\Leftrightarrow x(4y - 8) = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{4y-8}$ $(4y - 8 \neq 0$ car $y \in \mathbb{R} - \{2\})$

Ainsi :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{2\}, \exists! x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\}, y = f(x)$$

Montrons par l'absurde que $x = \frac{1-y}{4y-8} \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\}$.
Si $\frac{1-y}{4y-8} = \frac{-1}{4}$ alors $4(1-y) = -4y + 8 \Leftrightarrow 4 = 8$. Cela est impossible donc $\frac{1-y}{4y-8} \neq \frac{-1}{4}$.
Ainsi f est bien une bijection de $\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\}$ sur $\mathbb{R} - \{2\}$. Son application réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{4}\right\}$ est définie par :

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{4x-8}$$