Devoir Surveillé 4 - CORRECTION

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie par* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$.

On considère alors la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.
On remarque ainsi que la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) *Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$ puis étudier son signe.*
La fonction f est définie et continue sur $[-1;+\infty[$, mais n'est dérivable que sur $]-1;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}} > 0.$$

(b) *Déterminer la limite en $+\infty$ de f.*
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ *donc, par composition :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

(c) *Dresser le tableau de variation complet de f sur $[-1;+\infty[$.*
$f(-1) = 0$, d'où le tableau de variation :

x	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$
Variations de f	0 $\nearrow$	$+\infty$

(d) *Justifier alors que :*

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq f(x) \leq 1.$$

La fonction f est strictement croissante sur croissante sur $[-1;+\infty[$ donc a fortiori sur $[0;1]$. Par conséquent :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0 \leq f(x) \leq f(1)$$

Or $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ et $f(1) = 1$. Donc $0 \leq f(x) \leq 1$ si $x \in [0;1]$.

2. *Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$.*
   Soit la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$u_n \in [0;1]$" pour $n \in \mathbb{N}$.
   On sait que $u_0 = 0 \in [0;1]$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   On sait que $u_n \in [0;1]$ donc, d'après la question 1.d), $0 \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq 1$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc, par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. *Démontrer que :*

$$\forall x \in [0;1], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

   On sait que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}}$.

   $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}$
   $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$
   $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{4} \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

4. (a) *En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \mid u_n - 1 \mid$$

   On sait que :

   - *f est continue sur $[0;1]$*
   - *f est dérivable sur $]0;1[$*
   - $\forall x \in [0;1], \mid f'(x) \mid \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

   Par ailleurs, $u_n \in [0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\mid f(u_n) - f(1) \mid \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \mid u_n - 1 \mid \Leftrightarrow \mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \mid u_n - 1 \mid$$

   (b) *En déduire que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mid u_n - 1 \mid \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \mid u_0 - 1 \mid$$

   Soit la propriété $\mathscr{P}(n)$: " $\mid u_n - 1 \mid \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n \mid u_0 - 1 \mid$ " pour $n \in \mathbb{N}$.
   $\mid u_0 - 1 \mid = (\frac{1}{2\sqrt{2}})^0 \mid u_0 - 1 \mid$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, montrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
   D'après la question précédente : $\mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \mid u_n - 1 \mid$ et on sait que $\mid u_n - 1 \mid \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n \mid u_0 - 1 \mid$ donc :

$$| u_{n+1} - 1 | \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \times (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n = (\frac{1}{2\sqrt{2}})^{n+1}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire donc, par principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) *(u_n) converge-t-elle ? Si c'est le cas, déterminer sa limite.*
On sait que $| \frac{1}{2\sqrt{2}} | < 1$ donc $\lim(\frac{1}{2\sqrt{2}})^n = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim(u_n - 1) = 0$$

c'est-à-dire que (u_n) est convergente avec $\lim u_n = 1$.

Exercice 0.2. *On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

1. (a) *Étudier la parité de f.*
$D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors : $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -f(x)$ donc f est impaire.

(b) *Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.*
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

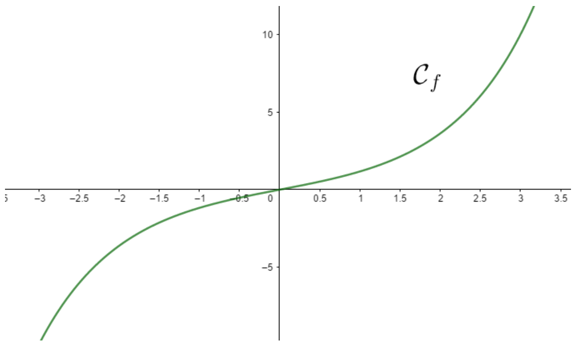
(c) *Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.*
On sait que :

- *f est continue sur $\mathbb{R}$*
- *f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

Donc, d'après le théorème de bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(d) *Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.*
$T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

(e) *Dessiner l'allure de $\mathscr{C}_f$.*



2. (a) *Soit $m \in \mathbb{R}$. Combien l'équation $(E_m) : f(x) = m$ admet-elle de solutions réelles ? Justifier.*
On sait que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $(E_m) : f(x) = m$ admet une unique solution.

(b) *Soit $m \in \mathbb{R}$, montrer que $m - \sqrt{m^2+1} < 0$.*
$m - \sqrt{m^2+1} < 0 \Leftrightarrow m < \sqrt{m^2+1}$.

- *si $m < 0$ l'inégalité est triviale.*
- *si $m \geq 0$: $\sqrt{m^2+1} > \sqrt{m^2} = \mid m \mid = m$. L'inégalité est donc également vérifiée.*

(c) *Soit $m \in \mathbb{R}$,résoudre l'équation $X^2 - 2mX - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.*
On calcule le discriminant : $\Delta = (-2m)^2 + 4 = 4(1+m^2) > 0$.
Il existe donc deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{2m-2\sqrt{1+m^2}}{2} = m - \sqrt{1+m^2} \text{ et } X_2 = m + \sqrt{1+m^2}$$

(d) *Résoudre l'équation (E_m) en fonction de m. En déduire l'expression de la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to I$.*

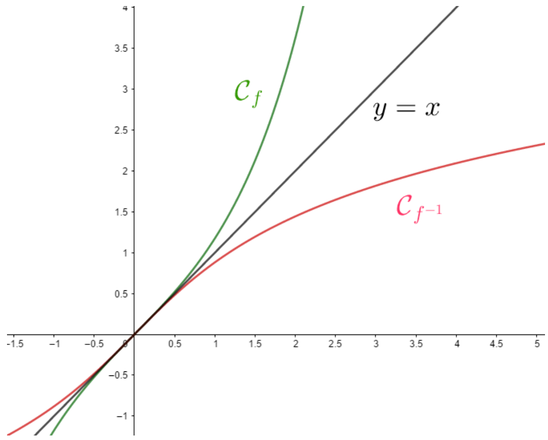
$$(E_m) \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = m \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2m \Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 2me^x = 0$$

Posons $X = e^x > 0$ alors $(E_m) \Leftrightarrow X^2 - 2mX - 1 = 0$.
D'après la question précédente, il existe deux solutions :

$$X_1 = \frac{2m-2\sqrt{1+m^2}}{2} = m - \sqrt{1+m^2} \text{ et } X_2 = m + \sqrt{1+m^2}$$

or, d'après la question 2.b, $X_1 < 0$ donc l'unique solution est $e^x = m + \sqrt{1+m^2} \Leftrightarrow x = ln(m + \sqrt{1+m^2})$.
Ainsi : $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{cases}$

(e) *Dessiner l'allure du graphe de f^{-1}.*



Exercice 0.3. *1. On considère l'application* $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(a) *Démontrer que* f *est continue sur* $[-1;1]$.
Indication : *on pourra utiliser l'expression conjuguée.*
On sait que f *est continue sur* $[-1;0[\cup]0;1]$ *comme composée de fonctions continues. Il reste à prouver la continuité en* 0*, c'est à dire à montrer que* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.
Si $x \neq 0$ *alors :*

$f(x) = \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})$
$= \frac{1}{x} \times \frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}$
$= \frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} = \frac{2x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{2} = 0 = f(0)$ *et* f *est continue en* 0.
On sait que f *est continue sur* $[-1;0[\cup]0;1]$ *et aussi en* 0 *donc* f *est continue sur* $[-1;1]$.

(b) *Démontrer que* f *est dérivable sur* $]-1;1[$.
Remarque : *on ne demande pas de déterminer* $f'(x)$*. On sait que* f *est dérivable sur* $[-1;0[\cup]0;1]$ *comme composée de fonctions dérivables. Reste à prouver la dérivabilité en* 0*, c'est-à-dire à démontrer que* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ *existe et est finie.*

$\tau_0(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{h^2}(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2})$
$= \frac{1}{h^2} \times \frac{(\sqrt{1+h^2}-\sqrt{1-h^2})(\sqrt{1+h^2}-\sqrt{1+h^2})}{(\sqrt{1+h^2}+\sqrt{1-h^2})}$
$= \frac{(1+h^2)-(1-h^2)}{h^2(\sqrt{1+h^2}+\sqrt{1-h^2})} = \frac{2h^2}{h^2(\sqrt{1+h^2}+\sqrt{1-h^2})} = \frac{2}{\sqrt{1+h^2}+\sqrt{1-h^2}}$
$\lim\limits_{h\to 0} \tau_0(h) = \frac{2}{1+1} = 1$.
Donc f *est bien dérivable en* 0 *avec* $f'(0) = 1$.

(c) *Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.*

$$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$

2. *Déterminer* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tan(\frac{x}{4})}-1}{ln(1+3x)}$.
On sait que $\lim_{x\to 0} tan(\frac{x}{4}) = tan(0) = 0$ *donc*

$$\sqrt{1+tan(\frac{x}{4})} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}tan(\frac{x}{4}).$$

De plus $\lim_{x\to 0} \frac{x}{4} = 0$ *donc* $tan(\frac{x}{4}) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{4}$. *Ainsi* $\sqrt{1+tan(\frac{x}{4})} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{8}$.
On sait que $\lim_{x\to 0} 3x = 0$ *donc* $ln(1+3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$.
Par quotient : $\frac{\sqrt{1+tan(\frac{x}{4})}-1}{ln(1+3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x}{8}}{3x} = \frac{1}{24}$.
Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{24}$.