# Devoir Surveillé 1

***Durée : 1 heure***

***Calculatrice interdite***

**Exercice 0.1.** *Déterminer l'inverse, si elle existe, de la matrice $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 0.2.**

1. *Montrer que l'ensemble*

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = y + z + t = 0 \right\}.$$

*est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

2. *Déterminer une base de $F$.*

**Exercice 0.3.** *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par*

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z).$$

1. *Montrer que $f$ est linéaire.*
2. *Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{de\,Im}(f)$.*

**Exercice 0.4.** *Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de l'endomorphisme $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P) = P'$.*

**Exercice 0.5.** *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.*

1. *Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que $A^2 = aA + bI_2$.*
2. *Montrer que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de $I_2$ et $A$.*
3. *Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P$.*
   *En déduire l'expression de $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*