Pour le 6 octobre 2023
Devoir-Maison 3 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa nature ?*
2. *Montrer que F est stable par f (c'est à dire que $f(F) \subset F$).*
3. *Après avoir justifié que $B = ((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de f dans la base B.*
   Que peut-on dire de la forme de cette matrice ?

Indication : *Pour montrer que F est stable par f, on pourra au choix :*

- *Montrer que pour tout $x \in F, f(x) \in F$*
- *Si $B = (u_1, \dots, u_p)$ est une base (ou plus généralement une partie génératrice) de F, montrer que :*

$$\forall i \in \{1, ...p\}\, f(u_i) \in F$$

1. On reconnait l'équation cartésienne d'un hyperplan, F est donc un hyperplan de E.

2. Par définition, on a

$$f : (x,y,z) \mapsto (2x + y - 2z, x, -2y + 3z)$$

Méthode 1 : Soit $(x,y,z) \in F$. Notons $(x',y',z') = f(x,y,z)$. Alors

$$x' - y' + z' = (2x + y - 2z) - x + (-2y + 3z) = x - y + z = 0$$

On en déduit que $f(x) \in F$. Donc $f(F) \subseteq F$, donc F est stable par F.
Méthode 2 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$(x,y,z) \in F \iff x - y + z = 0 \iff x = y - z \iff (x,y,z) \in \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$$

On en déduit que $F = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$. Or $\dim F = 2$ (car F est un hyperplan). On en déduit que $((1,1,0),(0,1,1))$ est une base de F. On a alors

$$f(1,1,0) = (3,1,-2), \quad 3 - 1 + (-2) = 0, \quad f(1,1,0) \in F$$
$$f(0,1,1) = (-1,0,1), \quad -1 - 0 + 1 = 0, \quad f(0,1,1) \in F$$

Donc $f(F) = \text{Vect}(f(1,1,0), f(0,1,1)) \subseteq F$, donc F est stable par f.
3. On sait que $((1,1,0), 0, 1, 1)$ est une base de F, c'est donc une famille libre.
D'autre part, $1-1+1 \neq 0$ donc $(1,1,1) \notin F$. On en déduit que B est encore libre.
D'autre part, $|B| = 3$, donc B est une base de $\mathbb{R}^3$.
Notons B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Inversons la matrice $P = \text{Pass}\,(B_c, B)$. Soit $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, alors

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\text{mat}_B(f) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 0.2. *On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère :*

$$F = \text{Vect}(1,1) \textit{ et } G = \text{Vect}(1,2).$$

1. *Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.*
2. *Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G.*

1. Les vecteurs $(1,1)$ et $(1,2)$ ne sont pas colinéaires, la famille $((1,1),(1,2))$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que F et G sont supplémentaires.

2. Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B' = ((1,1),(1,2))$. Alors :

$$P = \text{Pass}\,(B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \text{Pass}\,(B', B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notons A et A' les matrices de p dans les bases respectives B et B'.
Alors d'après la formule du changement de bases, on a :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = PA'P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

On en déduit que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p(x,y) = (2x - y, 2x - y)$$