Chap.43 : Indépendance et conditionnement

Dans ce chapitre, Ω désigne un univers fini et p une probabilité sur Ω.
A désignera un événement tel que $p(A) \neq 0$.

1 Probabilité conditionnelle

Exemple 1.1. *Imaginons que l'on soit au téléphone avec un ami qui lance un dé équilibré. On considère les événements :*

- *A : " le résultat du lancer est 4";*
- *B : " le résultat du lancer est 3";*
- *C : "le résultat du lancer est pair"*

On sait que $p(A) = p(B) = \frac{1}{6}$ et que $p(C) = \frac{1}{2}$.
Si cet ami nous informe que l'événement C est réalisé mais sans nous donner le résultat de l'expérience, alors les probabilités évoluent :

— *l'événement B ne peut pas s'être produit;*

— *la probabilité que A se soit produit devient $\frac{1}{3}$.*

On parle alors de probabilité "sachant (la réalisation de) " C".

Définition 1.2. *Soient deux événements A et B avec $p(A) > 0$.*
*On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A le réel :*

$$\boldsymbol{p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$$

Cette probabilité est aussi notée $p(A \mid B)$.

Proposition 1.3. *p_A est une probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A.*

Remarque 1.4. *D'après la propriété précédente, p_A vérifient toutes les règles opératoires d'une probabilité classique.*

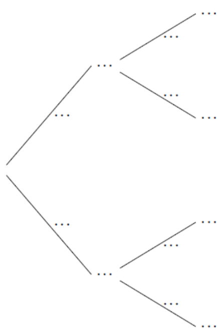
Application 1.5. *On considère une population sur laquelle on s'intéresse à la prévalence de la grippe (c'est-à-dire le taux de malades) selon que les individus aient été vaccinés ou pas.*
On sait que :

- *40% de la population a été vaccinée*
- *parmi les personnes vaccinées, seules 5% contractent la grippe;*
- *parmi les personnes non vaccinées, 30% contractent la grippe.*

On choisit une personne au hasard dans cette population et on s'intéresse aux événements :

- *V : "l'individu est vacciné ;*
- *G : l'individu est grippé*

On peut illustrer cette expérience à l'aide d'un arbre de probabilités :



1. *Déterminer la probabilité qu'une personne vaccinée ne contracte pas la grippe.*
2. *Déterminer la probabilité qu'une personne non vaccinée ne contracte pas la grippe.*

Application 1.6. *On considère deux événements A et B tels que :*

$$p(A) = 0,4,\ p(B) = 0,6 \text{ et } p(A \cup B) = 0,7$$

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $p(A \cap B)$
2. $p_A(B)$
3. $p_B(A)$

Application 1.7. *On considère deux événements A et B tels que :*

$$p(A) = 0,5,\ p(B) = 0,4 \text{ et } p_{\overline{A}}(B) = 0,6$$

Déterminer les probabilités suivantes :

1. $p(A \cup B)$
2. $p_{\overline{B}}(A)$

Proposition 1.8. ***Formule des probabilités composées.***
Soient A et B deux événements de probabilités non-nulles. On a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

Preuve :

Remarque 1.9. *Une conséquence de la formule des probabilités composées : lorsque l'on travaille avec un arbre de probabilité, la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.*
Par exemple, sur l'exemple de l'application précédente :

$$p(V \cap G) = p(V) \times p_V(G) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$$

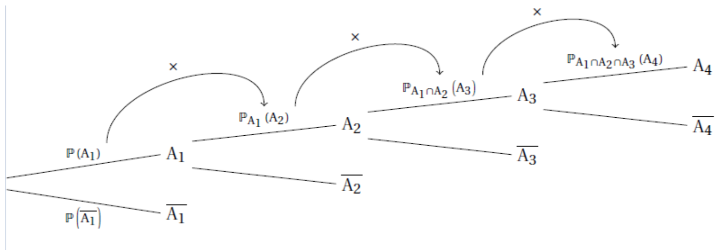
Application 1.10. *On considère un groupe d'adultes comprenant 60% d'hommes.*
On sait que 10% des hommes et 20% des femmes savent parler anglais.
On tire au sort un individu de ce groupe et on note :

- *H l'événement "avoir choisi un homme"*
- *A l'événement "avoir choisi un individu parlant anglais"*

1. *Traduite cet énoncé en terme de probabilités.*
2. *Traduire les événement en fonction de A et H puis calculer les probabilités des événements suivants :*
   (a) *E_1 : "L'individu est un homme parlant anglais".*
   (b) *E_2 : "L'individu est un homme ne parlant pas anglais".*
   (c) *E_3 : "L'individu est un femme parlant anglais".*
   (d) *E_4 : "L'individu est un femme ne parlant pas anglais".*
3. *L'individu tiré au sort sait parler anglais. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?*

Proposition 1.11. ***Généralisation de la formule des probabilités composées.***
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille d'événements telle que* $p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})) \neq 0$ *alors :*

$$p(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) \times p_{A_1\cap A_2}(A_3) \times ... \times p_{A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1}}(A_n)$$



Remarque 1.12. *On utilise souvent la formule des probabilités composées lorsque la situation étudiée peut s'apparenter à des tirages successifs dans une urne, la composition de l'urne étant modifiée à l'issue de chaque tirage (en particulier lorsque les tirages sont effectués sans remise).*

Application 1.13. *Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise.*

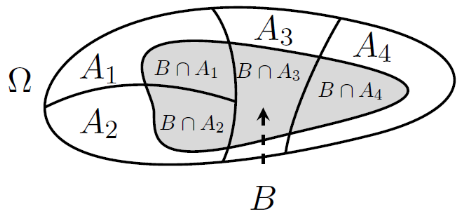
1. *Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?*
2. *Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 2 boules blanches exactement ?*

Application 1.14. *Une urne contient initialement 7 jetons blancs et 3 jetons rouges. On tire successivement trois jetons selon la règle suivante : si le jeton tiré est blanc, on le retire et on met un jeton rouge à la place, si le jeton tiré est rouge, on le retire de l'urne.*
Soit B_i *l'événement : « le jeton tiré au* $i-$*ème tirage est blanc ».*

1. *Dresser un arbre de probabilités.*
2. *Calculer* $p(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$.

Proposition 1.15. ***Formule des probabilités totales.*** *Soit $A_1, ..., A_n$ un système complet d'événements, dont chaque événement a une probabilité non nulle.*
Alors pour tout événement B :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(B) \times p(A_i)$$



Preuve :

Application 1.16. *Trois urnes contiennent des jetons blancs et des jetons noirs :*

- *l'urne U_1 contient 3 jetons noirs et trois jetons blancs ;*
- *l'urne U_2 contient 4 jetons blancs et 6 jetons noirs ;*
- *l'urne U_3 contient 1 jeton blanc et 3 jetons noirs.*

On choisit une urne au hasard puis on tire un jeton dans cette urne.
Déterminer la probabilité de tirer un jeton noir.

Proposition 1.17. ***Formule de Bayes.***

- *Si A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ alors :*

$$p_B(A) = \frac{p(A)\times p_A(B)}{p(B)}$$

- *Soient $A_1, ..., A_r$ un système complet d'événements dont chaque événement a une probabilité non nulle et B un événement de probabilité non nulle. Alors :*

$$\forall j \in [\![1, r]\!], p_B(A_j) = \frac{p(A_j)\times p_{A_j}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{r} p_{A_i}(B)\times p(A_i)}$$

Preuve :

Application 1.18. *Reprendre l'exemple des individus vaccinés contre la grippe (Application 1.5) et déterminer :*

1. *La probabilité de contracter la grippe.*
2. *La probabilité qu'un individu grippé ait été vacciné.*

Application 1.19. *Dans un lot de pièce usinées, il y a 5% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces à la sortie de l'usine,mais ce contrôle est aléatoire :*

- *Si une pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 98%.*
- *Si une pièce est bonne, elle est refusée avec une probabilité de 4%.*

On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle.

1. *Déterminer la probabilité de l'événement E : « il y a une erreur dans le contrôle ».*
2. *Déterminer la probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est refusée.*
3. *Déterminer la probabilité que la pièce soit mauvaise sachant qu'elle est refusée.*

2 Indépendance

Définition 2.1. *Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont* ***indépendants*** *pour la probabilité p lorsque :*

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Proposition 2.2. *Soient A et B deux événements avec $p(B) \neq 0$. Alors :*

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p_B(A) = p(A)$$

Remarque 2.3. *Cette propriété permet de faire le lien avec le concept intuitif d'indépendance : A et B sont indépendants lorsque la réalisation de B n'influe pas sur le pronostic de l'événement A.*

Application 2.4. *On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte est un carreau » et B l'événement « la carte est un valet ». Montrer que les événements A et B sont indépendants.*

Application 2.5. *On lance un dé équilibré et on considère les événements suivants :*

- *A : "obtenir un résultat pair"*
- *B : obtenir un résultat multiple de 3"*
- *C : "obtenir un résultat supérieur ou égal à 4"*

1. *Les événements A et B sont-ils indépendants ?*
2. *Les événements A et C sont-ils indépendants ?*

Proposition 2.6. *Si A et B sont deux événements indépendants alors :*

- *A et $\overline{B}$ sont indépendants ;*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants ;*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Preuve :

Définition 2.7. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_r$ une famille d'événements.*
On dit que $A_1, A_2, ..., A_r$ sont mutuellement indépendants lorsque pour tout ensemble J d'indices dans $[\![1, r]\!]$:

$$p(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} p(A_i)$$

Exemple 2.8. *La notion d'indépendance d'événements se rencontre dans les situations où l'on répète un certain nombre de fois la même expérience* ***sans modification des conditions****.*

On lance plusieurs fois de suite un même dé ou une même pièce : les résultats des différents lancers sont mutuellement indépendants.
On effectue des tirages avec remise de boules dans une urne. Les résultats sont mutuellement indépendants.

Application 2.9. *Une urne contient quatre jetons indiscernables au toucher : un bleu, un blanc, un rouge et un tricolore (bleu blanc rouge). On considère les événements :*

- *A : « le jeton tiré contient du bleu »*
- *B : « le jeton tiré contient du blanc »*
- *C : « le jeton tiré contient du rouge »*

Les événements A,B et C sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellement indépendants ?

Remarque 2.10.
- *Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.*
- *L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle.*

Application 2.11. *On lance deux dés équilibrés, un rouge et un bleu. Soient les événements :*
- *A : " le dé rouge donne un nombre pair "*
- *B : "le dé bleu donne un nombre pair"*
- *C : "la somme des deux nombres obtenus est paire"*

Étudier l'indépendance deux à deux ainsi que l'indépendance mutuelle de ces trois événements.

Application 2.12. *Soit A_n l'événement « au cours des n premiers lancers d'un dé cubique parfaitement équilibré, on n'obtient aucun 6 ».*
Calculer $p(A_n)$.