Devoir Surveillé 5

Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. ***Courbe invariante par rotation.***

Le plan $\mathscr{P}$ *est rapporté à un repère orthonormé* $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. *Soit* Γ *la courbe définie par la fonction vectorielle :*

$$\vec{f} : t \mapsto \begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} .$$

On notera $M(t)$ *le point du plan défini par* $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$.

1. *Soit* Γ_1 *la partie de la courbe* Γ *correspondant à* $t \in [0; \pi]$. *Montrer que l'on peut obtenir toute la courbe* Γ *à partir de* Γ_1. *On précisera les transformations géométriques utilisées.*

2. *Montrer que la courbe* Γ_1 *présente deux points singuliers :* $t = 0$ *et* $t = t_0$ *à déterminer.*
3. *Construire un tableau comprenant les signes des dérivées* x', y' *sur* $[0; \pi]$, *les variations des fonctions* x *et* y *sur* $[0; \pi]$, *et les valeurs aux points remarquables.*
4. *Déterminer un vecteur directeur de la tangente* $\mathscr{T}_0$ *à* Γ_1 *au point* $t = 0$, *et montrer que ce point est un point de rebroussement de première espèce.*
5. *Déterminer une équation cartésienne de la tangente* $\mathscr{T}_1$ *à* Γ_1 *au point* $t = t_0$, *et montrer que ce point est également un point de rebroussement de première espèce.*
6. *Soient* $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_2$ *les cercles de centre* $\Omega = (3; 0)$ *et de rayons respectifs* $R_1 = 3$ *et* $R_2 = 1$.
   (a) *Vérifier que la droite* $\mathscr{T}_1$ *passe par le point* Ω.
   (b) *Déterminer l'intersection* $\Gamma \cap \mathscr{C}_1$.
   (c) *Montrer que la courbe* Γ *et le cercle* $\mathscr{C}_2$ *ont la même tangente au point de paramètre* $t = \frac{\pi}{3}$.
7. *Dans le repère* $\mathscr{R}$, *tracer les cercles* $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_2$, *puis les tangentes à* Γ *aux points de paramètres* $t = 0, t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ *et* $t = \pi$. *Tracer ensuite la courbe* Γ_1 *en trait plein, et la compléter en pointillés jusqu'à obtenir* Γ. *On fera apparaitre tous les points remarquables.*

8. *Montrer que pour tout réel* t*, le point* $M\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)$ *est l'image du point* $M(t)$ *par la rotation* r *de centre* Ω *et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$*.*
9. *Calculer la longueur de la courbe* Γ*.*

Exercice 0.2. ***La fonction Dilogarithme***
On considère la fonction f *définie sur* $]-\infty, 1[$ *par :*

$$f(t)=\left\{\begin{array}{cl} -\frac{\ln(1-t)}{t} & si\ t\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ 1 & si\ t=0 \end{array}\right. .$$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $]-\infty, 1[$*.*

   La question précédente montre que f *possède des primitives sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$*.*
   On appelle ***fonction Dilogarithme*** *la primitive de* f *nulle en 0 , c'est-à-dire la fonction :*

$$L :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, \quad L(x)=\int_0^x f(t)dt$$

2. *Rappeler (sans démonstration) le développement en série entière de* $t\mapsto\frac{1}{1-t}$*, ainsi que son domaine réel de validité.*
3. *En déduire le développement en série entière de* $t\mapsto-\ln(1-t)$*, ainsi que son domaine réel de validité. On précisera soigneusement le théorème utilisé.*
4. *Montrer que* f *est développable en série entière sur un intervalle ouvert à préciser, et donner son développement.*
5. *En déduire que* $L(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$ *pour tout* $x\in]-1;1[$*.*

Exercice 0.3. *On dit qu'une matrice* N *carrée d'ordre* n *est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel* k *no nul tel que*

$$N^{k-1}\neq 0_n \ et\ N^k=0_n$$

où 0_n *représente la matrice carrée nulle d'ordre* n*. Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n*, on dit que le couple* (Δ, N) *est une* ***décomposition de Dunford*** *de* A *lorsque :*

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\ est\ une\ matrice\ diagonalisable \\ N\ est\ une\ matrice\ nilpotente \\ \Delta N=N\Delta\ et\ A=N+\Delta \end{array}\right.$$

1. *On pose :*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) *est une décomposition de Dunford de* A.
Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) *Déterminer les valeurs propres de* A.
   (b) *La matrice* A *est-elle diagonalisable ?*
3. *On considère les matrices colonnes :*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Calculer les produits* $\Delta X_1, \Delta X_2$ *et* ΔX_3.
   (b) *Justifier que la matrice* Δ *est diagonalisable et déterminer une matrice* P *inversible telle que :* $\Delta = PDP^{-1}$.
   (c) *Calculer* P^{-1}.
4. (a) *Établir que* N *est une matrice nilpotente.*
   (b) *Vérifier que* (Δ, N) *est une décomposition de Dunford de la matrice* A.
   (c) *En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de* A^n *en fonction des puissances de* Δ, *de* N *et de* n.
   (d) *Établir que : pour tout entier naturel* $k \geqslant 1, \quad \Delta^k N = N$.
   (e) *Proposer une décomposition de Dunford de* A^n.