

Chap.14 : Isométries d'un espace euclidien

Table des matières

1	Isométries	2
1.1	Groupe orthogonal	2
1.2	Symétrie orthogonale	4
1.3	Matrices orthogonales	4
1.4	Lien entre isométrie et matrice orthogonale	7
2	Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3	8
2.1	Orientation d'un espace vectoriel	8
2.2	En dimension 2	9
2.3	En dimension 3	13
3	Matrices symétriques	17

Dans tout ce chapitre $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, c'est-à-dire E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . On notera de plus $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

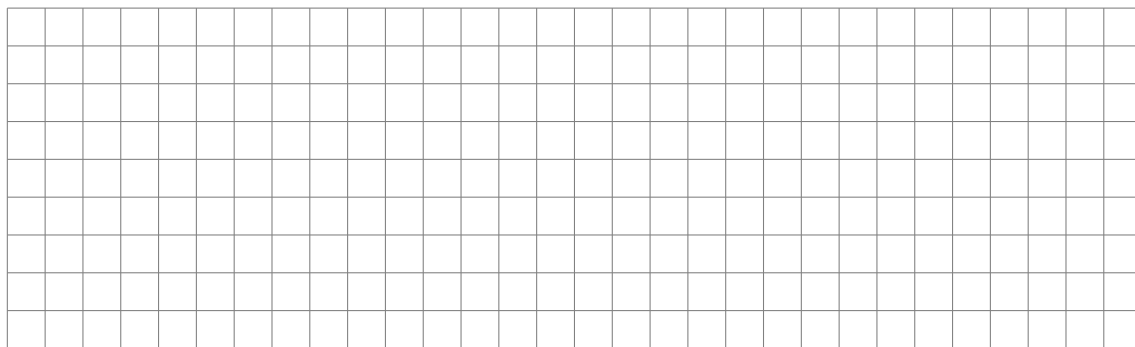
1 Isométries

1.1 Groupe orthogonal

Définition 1.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une **isométrie** de E si et seulement si f "conserve la norme", c'est-à-dire :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$$

Application 1.2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 (muni de son produit scalaire canonique) défini par $f(x, y, z) = (z, x, y)$.
Montrer que f est une isométrie de \mathbb{R}^3 .



Proposition 1.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une isométrie de E si et seulement si f "conserve le produit scalaire", c'est-à-dire :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \langle f(\vec{x}) | f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$

Proposition 1.4. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est une isométrie de E ;
2. f est un endomorphisme de E transformant toute base orthonormée de E en une base orthonormée de E ;
3. f est un endomorphisme de E et il existe une base orthonormée de E que f transforme en une base orthonormée.

Méthode 1.5. Dans un espace euclidien, pour montrer qu'un endomorphisme est une isométrie on dispose donc pour l'instant de trois méthodes :

- montrer qu'il conserve la norme :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|;$$

- montrer qu'il conserve le produit scalaire :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \langle f(\vec{x}) | f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle;$$

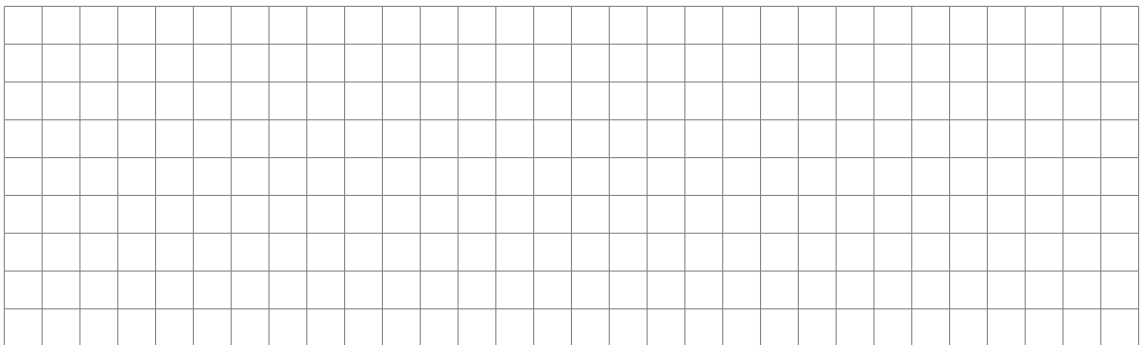
- montrer qu'il transforme une base orthonormée (on peut choisir une base ou en prendre une quelconque) en une base orthonormée.

Définition 1.6. L'ensemble de toutes les isométries de E s'appelle le **groupe orthogonal** de E et se note $\mathcal{O}(E)$

Proposition 1.7. Soient f et g deux isométries de E .

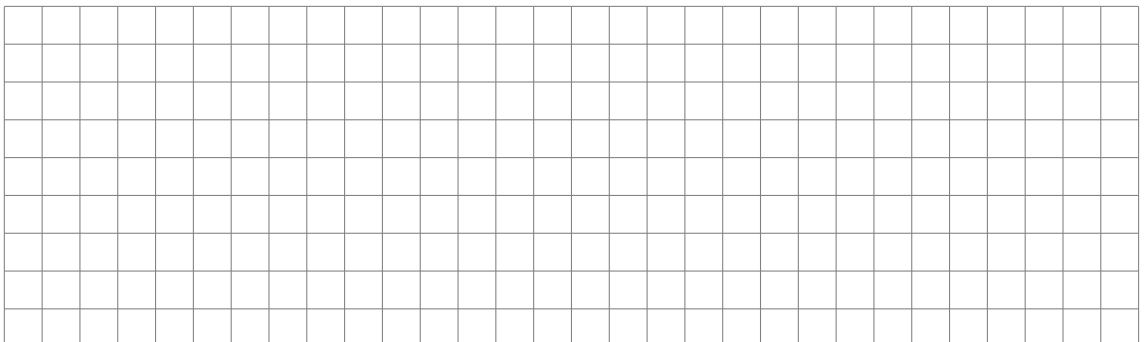
- $f \circ g$ est une isométrie de E . ($\mathcal{O}(E)$ est stable par composée.)
- f est un automorphisme de E (c'est-à-dire f est bijectif) et f^{-1} est aussi une isométrie.

Preuve :



Proposition 1.8. Soit f une isométrie de E et F un sous-espace vectoriel de E . Si F est stable par f (c'est-à-dire $f(F) \subset F$) alors F^\perp est stable par f .

Preuve :



1.2 Symétrie orthogonale

Définition 1.9. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Comme $E = F \oplus F^\perp$ (car E de dimension finie), pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un unique vecteur $\vec{y} \in F$ et un unique vecteur $\vec{z} \in F^\perp$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. L'application s_F qui à tout vecteur \vec{x} de E associe le vecteur $\vec{y} - \vec{z}$ s'appelle la **symétrie orthogonale par rapport à F** .

Proposition 1.10. Soit F un sous-espace vectoriel de E et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F .

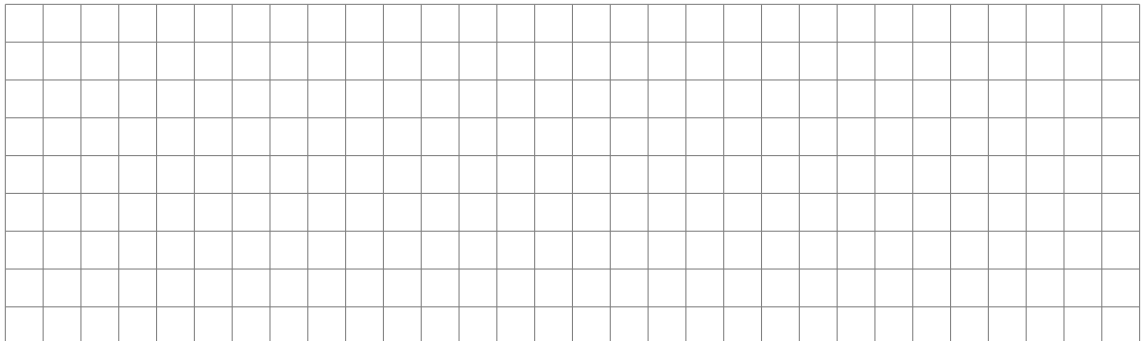
Alors s_F est une symétrie vectorielle, c'est-à-dire s_F est un endomorphisme de E tel que $s_F \circ s_F = \text{id}_E$.

Remarque 1.11. Pas de démonstration détaillée ici, mais il suffit de remarquer que l'application s_F définie ci-dessus est une application linéaire et on voit rapidement que :

$$s_F(s_F(\vec{x})) = s_F(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{y} - (-\vec{z}) = \vec{x}.$$

Proposition 1.12. Soit F un sous-espace vectoriel de E et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Alors s_F est une isométrie de E .

Preuve :



Définition 1.13. Soit F un hyperplan de E (c'est-à-dire $\dim(F) = \dim(E) - 1$).

Alors la symétrie orthogonale par rapport à F s'appelle aussi la **réflexion par rapport à F** .

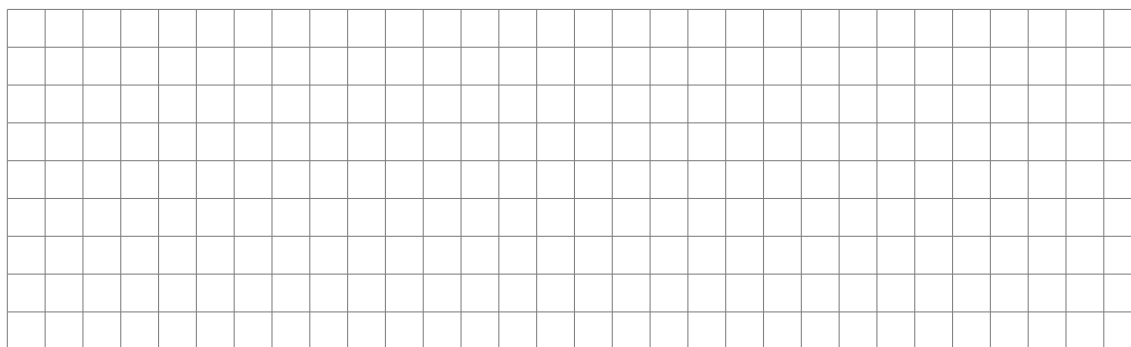
1.3 Matrices orthogonales

Définition 1.14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une **matrice orthogonale** si et seulement si elle vérifie

$$M^T \times M = I_n$$

où I_n désigne la matrice identité.

Application 1.15. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.



Définition 1.16. L'ensemble de toutes les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'appelle le **groupe orthogonal d'ordre n** et se note $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1.17. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. M est une matrice orthogonale ;
2. les colonnes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique ;
3. les lignes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique ;
4. M est inversible et $M^{-1} = M^T$.

Méthode 1.18. Voici les méthodes dont nous disposons pour l'instant pour montrer qu'une matrice carrée est orthogonale :

- Vérifier que l'on a $M^T \times M = I_n$.
- Vérifier que les colonnes (ou les lignes) de M , vues comme des n -uplets, sont orthogonales deux à deux et sont toutes de norme 1. (Les colonnes formeront donc une famille orthonormée, donc libre, de n vecteurs de \mathbb{R}^n , par conséquent une BON.)
- Si on a déjà calculé M^{-1} , remarquer que $M^{-1} = M^T$. (Assez rarement utilisée)

Remarque 1.19. Pour une matrice orthogonale $M^{-1} = M^T$ donc :

$$M^T \times M = M \times M^T = I_n.$$

Application 1.20. Montrer que la matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale et en en déduire M^{-1} .



Proposition 1.21. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E .

La base \mathcal{B}' est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est une matrice orthogonale.

Méthode 1.22. • Cette propriété nous donne une méthode supplémentaire pour montrer qu'une matrice est orthogonale : si on remarque que la matrice que l'énoncé nous donne est la matrice de passage entre deux bases orthonormées alors on peut conclure que cette matrice est orthogonale.

- Pour une matrice de passage entre deux bases orthonormées, pas besoin de gros calculs pour avoir P^{-1} :

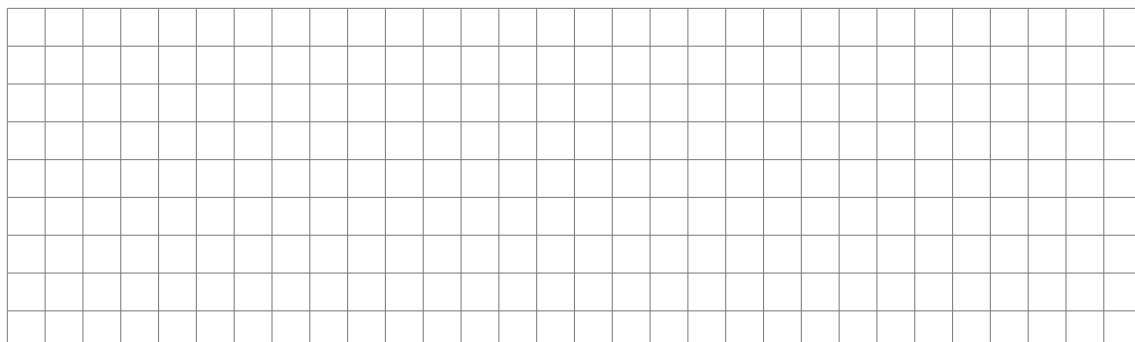
$$P^{-1} = P^T$$

- Cette propriété nous donne aussi une méthode supplémentaire pour montrer qu'une base \mathcal{B}' est orthonormée : si on sait que \mathcal{B} est une base orthonormée et que la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale alors on peut conclure que \mathcal{B}' est une base orthonormée.

Proposition 1.23. Soit M une matrice orthogonale. Alors :

$$\det(M) \in \{-1; 1\}.$$

Preuve :



Définition 1.24. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 s'appelle le **groupe spécial orthogonal d'ordre n** et se note $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1 se note $\mathcal{O}^-(n)$.

Proposition 1.25. • Si M et N sont deux matrices orthogonales d'ordre n , alors MN est une matrice orthogonale d'ordre n . ($\mathcal{O}(n)$ est stable par produit)

- Si M est une matrices orthogonale d'ordre n , alors M^{-1} est une matrice orthogonale d'ordre n . ($\mathcal{O}(n)$ est stable par passage à l'inverse)
- Si M et N appartiennent à $\mathcal{SO}(n)$ alors $MN \in \mathcal{SO}(n)$ et $M^{-1} \in \mathcal{SO}(n)$. ($\mathcal{SO}(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse)
- Si M appartient à $\mathcal{O}^-(n)$ alors $M^{-1} \in \mathcal{O}^-(n)$. ($\mathcal{O}^-(n)$ est stable par passage à l'inverse)

Remarque 1.26. $\mathcal{O}^-(n)$ n'est pas stable par produit : si $M \in \mathcal{O}^-(n)$ et $N \in \mathcal{O}^-(n)$ alors

$$\det(MN) = \det(M) \det(N) = (-1) \times (-1) = 1$$

, donc $MN \in \mathcal{SO}(n)$.

1.4 Lien entre isométrie et matrice orthogonale

Proposition 1.27. Soit f un endomorphisme de E . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. f est une isométrie ;
2. il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice associée à f est une matrice orthogonale ;
3. la matrice associée à f dans toute base orthonormée est une matrice orthogonale.

Remarque 1.28. Attention il est très important que la matrice associée à f soit relative à une base orthonormée !

Méthode 1.29. Cette propriété nous donne une méthode supplémentaire pour montrer qu'un endomorphisme donné est une isométrie : il suffit de montrer que sa matrice dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Corollaire 1.30. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors $\det(f) \in \{-1; 1\}$.

Définition 1.31. • L'ensemble des isométries vectorielles dont le déterminant vaut 1 se note $\mathcal{SO}(E)$ et est appelé **groupe spécial orthogonal** ou encore groupe des isométries positives.

- Une isométrie positive s'appelle aussi une **rotation**.
- L'ensemble des isométries vectorielles dont le déterminant vaut -1 (aussi appelés isométries négatives) se note $\mathcal{O}^-(E)$.

Proposition 1.32. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, \mathcal{B} une base orthonormée de E et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Si A est une matrice orthogonale et symétrique alors f est la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(f - \text{id}_E)$.

Preuve :

- Comme A est une matrice orthogonale et symétrique on a : $A \times A = A^T \times A = I_n$.
Ainsi on a $f \circ f = \text{id}_E$, ce qui signifie que f est une symétrie vectorielle.
- Un symétrie vectorielle est une symétrie par rapport à $\ker(f - \text{id}_E)$ et parallèlement à $\ker(f + \text{id}_E)$.
Pour montrer que f est une symétrie orthogonale il nous reste à montrer que $\ker(f - \text{id}_E)$ et $\ker(f + \text{id}_E)$ sont orthogonaux.
Soit $\vec{x} \in \ker(f - \text{id}_E)$ et $\vec{y} \in \ker(f + \text{id}_E)$. On a donc $f(\vec{x}) = \vec{x}$ et $f(\vec{y}) = -\vec{y}$. Cela nous permet d'écrire :

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}) | -f(\vec{y}) \rangle = -\langle f(\vec{x}) | f(\vec{y}) \rangle = -\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$$

Pour la dernière égalité on a utilisé le fait que f est une isométrie car sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

On a donc $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ et ainsi $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0$.

On a donc bien montré que $\ker(f - \text{id}_E) \perp \ker(f + \text{id}_E)$.

En conclusion on a bien montré que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(f - \text{id}_E)$.

Remarque 1.33. Attention !!! Si la matrice de f est uniquement symétrique on ne peut pas dire que f est une symétrie !.

2 Description du groupe orthogonal en dimension 2 et 3

2.1 Orientation d'un espace vectoriel

Définition 2.1. On considère un espace euclidien et on choisit une base orthonormée \mathcal{B} que l'on appelle base de référence.

Une base orthonormée \mathcal{B}' est alors dite **directe** lorsque $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) > 0$.

Dans le cas contraire la base \mathcal{B}' est dite **rétrograde** ou **indirecte**.

Lorsqu'on choisit la base de référence on dit que l'on **oriente** E .

Remarque 2.2. Lorsque \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormées directes, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale donc son déterminant vaut 1 et c'est donc une matrice de $\mathcal{SO}(n)$.

Si \mathcal{B}' est une base rétrograde alors :

$$\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = -1.$$

2.2 En dimension 2

Dans toute cette partie E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2 .

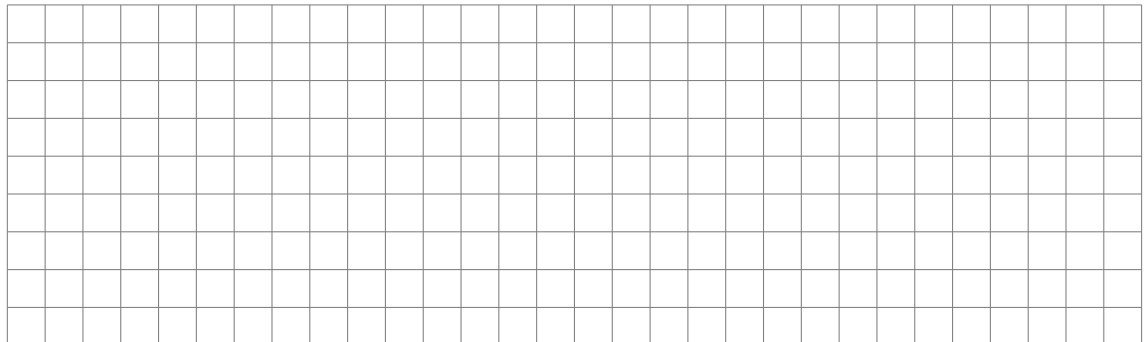
Théorème 2.3. • Soit $A \in \mathcal{SO}(2)$. Alors il existe θ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

• Soit $A \in \mathcal{O}^-(2)$. Alors il existe θ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Preuve :



Remarque 2.4. On note souvent $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ les matrices de $\mathcal{SO}(2)$.

Proposition 2.5.

Soient θ et α deux réels. Alors :

$$R(\theta) \times R(\alpha) = R(\theta + \alpha) \text{ et } R^{-1}(\theta) = R(-\theta).$$

Preuve :



Théorème 2.6. Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans n'importe quelle base orthonormée directe de E on a :

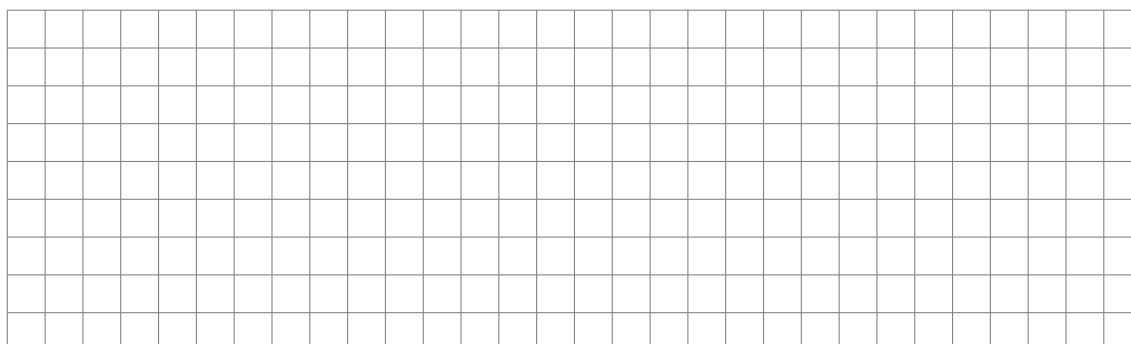
$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R(\theta)$$

On dit alors que f est la **rotation d'angle** θ .

Remarque 2.7.

Il est important de comprendre que la valeur de θ ne change pas même si on change de base orthonormée directe.

Preuve :



Théorème 2.8. Soit $f \in \mathcal{O}^-(E)$. Alors il existe une base orthonormée de E , notée \mathcal{B} , telle que :

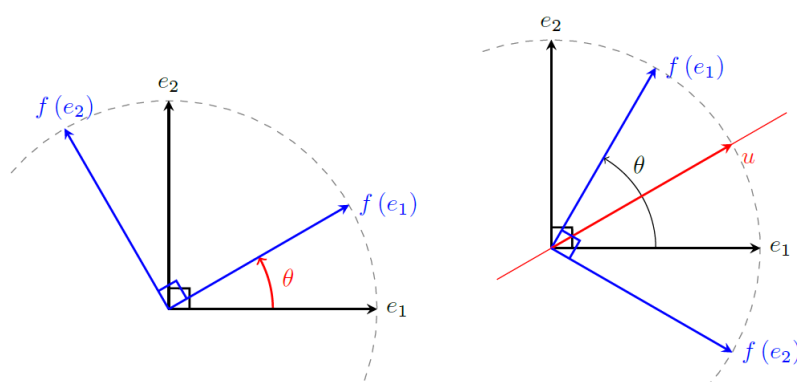
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f est donc la symétrie orthogonale par rapport à $\ker(f - \text{id}_E)$.

Remarque 2.9. Dans une base orthonormée quelconque de E la matrice de $f \in \mathcal{O}^-(E)$ sera de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ qui changera en fonction de la base choisie.

Le théorème affirme qu'en choisissant bien la base orthonormée la matrice de f sera de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2.10. Étude d'une matrice de $\mathcal{O}(2)$



On dispose d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A .

L'énoncé nous demande de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

1. Vérifier que A est une matrice orthogonale : les colonnes forment une famille orthonormée ou les lignes forment une famille orthonormée ou encore $A^T A = I_2$.
2. **Nature de f :**
 - (a) Si A est une matrice symétrique alors f est une symétrie orthogonale.
 - (b) Si A n'est pas une matrice symétrique f est une rotation vectorielle.
3. **Éléments caractéristiques :** on ne traite que le point correspondant à la nature trouvée pour f .
 - (a) On cherche les invariants de f :

$$f((x, y)) = (x, y) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots$$

$$\text{Donc } \ker(f - \text{id}_E) = \dots$$

(b) Il nous faut l'angle de la rotation :

on sait que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ donc on peut trouver θ .

4. **Conclusion** : encore une fois on ne prend en compte que le point correspondant à la nature trouvée pour f .

(a) f est la symétrie orthogonale par rapport à... (on met ce que l'on a trouvé pour les invariants de f)

(b) f est la rotation vectorielle d'angle ... (on met ce que l'on a trouvé pour θ)

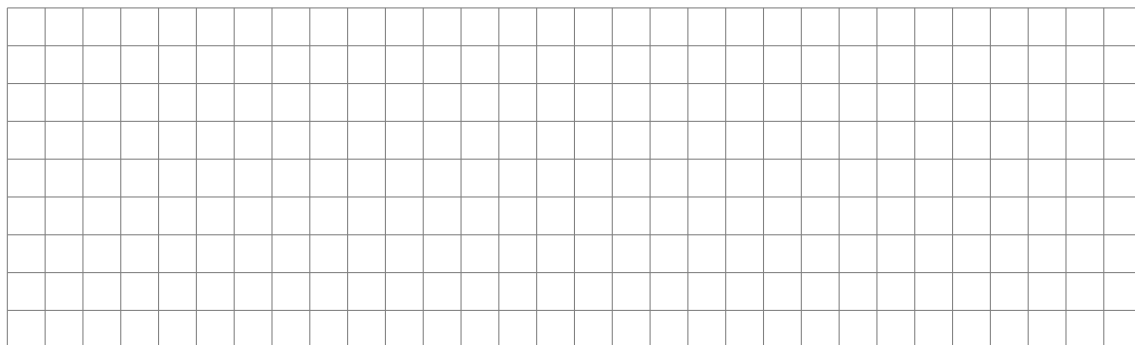
Application 2.11. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$



Application 2.12. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$



2.3 En dimension 3

Dans cette partie E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3.

Théorème 2.13. • Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. Alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et un réel θ tels que :

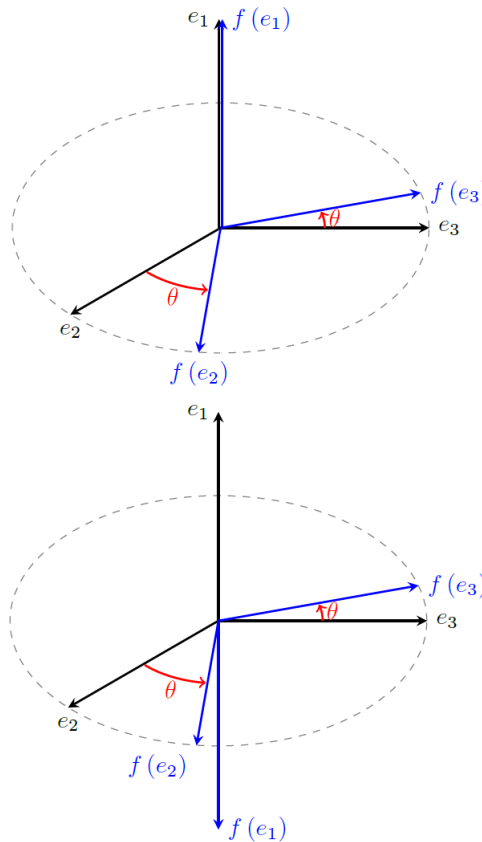
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit que f est la **rotation d'axe dirigé par e_1 d'angle θ** .

• Soit $f \in \mathcal{O}^-(E)$. Alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et un réel θ tels que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f est alors la composée de la rotation d'axe dirigé par e_1 d'angle θ et de la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{vect}(e_1))^\perp$.



Remarque 2.14.

- Lorsque $f \in \mathcal{SO}(E)$ et $\theta = \pi$, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\text{vect}(e_1)$.
- Lorsque $f \in \mathcal{O}^-(E)$ et $\theta = 0$, f est tout simplement la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\text{Vect}(e_1))^\perp$.
- Lorsque $f \in \mathcal{O}^-(E)$ et $\theta = \pi$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = -I_3$ et donc $f = -id_E$.

Théorème 2.15. Soit $A \in \mathcal{O}(3)$. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad P^T A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Méthode 2.16. Étude d'une matrice de $\mathcal{O}(3)$ On dispose d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A . L'énoncé nous demande de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

1. **Vérifier que A est une matrice orthogonale :** les colonnes forment une famille orthonormée ou les lignes forment une famille orthonormée ou encore $A^T A = I_3$.
2. **Nature de f :**
 - (a) Si la matrice A est symétrique f est une symétrie orthogonale.
 - (b) Si A n'est pas une matrice symétrique et $A \in \mathcal{SO}(3)$ (pour déterminer cela deux méthodes : on vérifie que $\det(A) = 1$ ou que $C_1 \wedge C_2 = C_3$) alors f est une rotation vectorielle.
 - (c) Si A n'est pas une matrice symétrique et $A \in \mathcal{O}^-(3)$ (pour déterminer cela deux méthodes : on vérifie que $\det(A) = -1$ ou que $C_1 \wedge C_2 = -C_3$) alors f est la composée d'une rotation vectorielle et d'une symétrie orthogonale.
3. **Éléments caractéristiques :**
on ne traite que le point correspondant à la nature trouvée pour f .
 - (a) On cherche les invariants de f :

$$f((x, y, z)) = (x, y, z) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots$$

Donc $\ker(f - id_E) = \dots$

- (b) Il nous faut dans ce cas l'axe de la rotation et l'angle.

- Pour trouver l'axe on cherche les invariants de f :

$$f((x, y, z)) = (x, y, z) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dots$$

Donc $\ker(f - \text{id}_E) = \dots = \text{vect}(\vec{u})$.

- Pour trouver l'angle on utilise deux informations : On sait que $\text{tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc on peut trouver facilement $\cos(\theta)$. On choisit un vecteur \vec{x} non colinéaire à \vec{u} (en pratique on prend souvent un des vecteurs de la base canonique que \mathbb{R}^3) et on admet que $\sin(\theta)$ est du même signe que $\det_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{x}, f(\vec{x}))$. Avec les informations sur $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ on peut donner θ (à 2π près évidemment...)

(c) Il nous faut ici l'axe de la rotation, l'angle et l'ensemble par rapport auquel on fait la symétrie orthogonale :

- On applique la méthode précédente à $-A$: on trouve un axe $\text{vect}(\vec{u})$ et un angle θ . La rotation qui compose f est alors la rotation d'axe $\text{vect}(\vec{u})$ et d'angle $\theta + \pi$.
- La symétrie orthogonale qui compose f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{vect}(\vec{u}))^\perp$.

4. **Conclusion** : on ne traite que le point correspondant à la nature trouvée pour f .

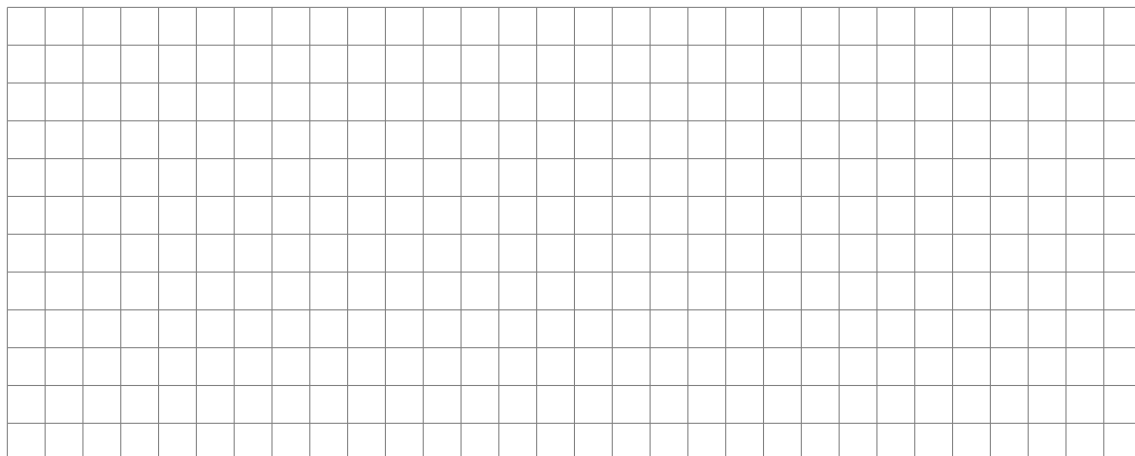
- f est la symétrie orthogonale par rapport à ... (ce qu'on a trouvé pour les invariants).
- f est la rotation vectorielle d'axe ... (ce qu'on a trouvé pour les invariants) et d'angle ... (ce qu'on a trouvé pour θ).
- f est la composée de la la rotation vectorielle d'axe ... (ce qu'on a trouvé pour les invariants de $-f$) et d'angle ... (ce qu'on a trouvé pour $\theta + \pi$) et de la symétrie orthogonale par rapport à $(\dots)^\perp$ (à la place des pointillés on met les invariants de $-f$).

Remarque 2.17. • Lorsque f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, on dit aussi que f est un demi-tour par rapport à la droite $E_1(f)$.

- Lorsque f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, on dit aussi que f est une réflexion par rapport au plan $E_1(f)$.

Application 2.18. Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



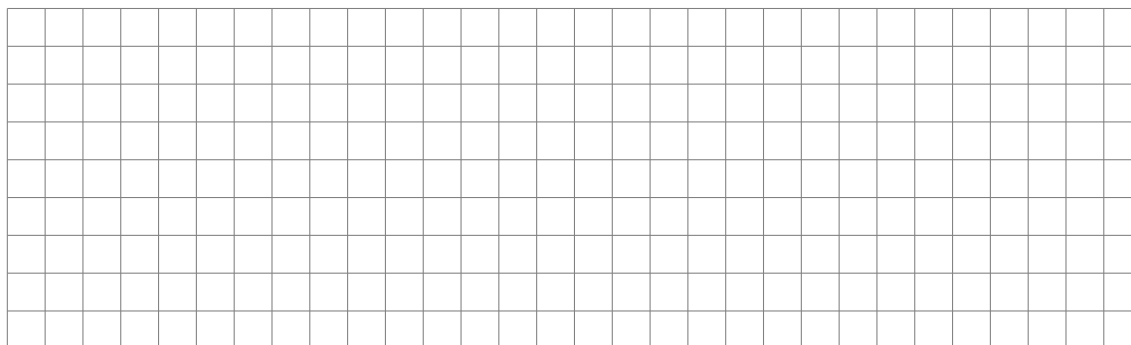
Application 2.19. Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Application 2.20. Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

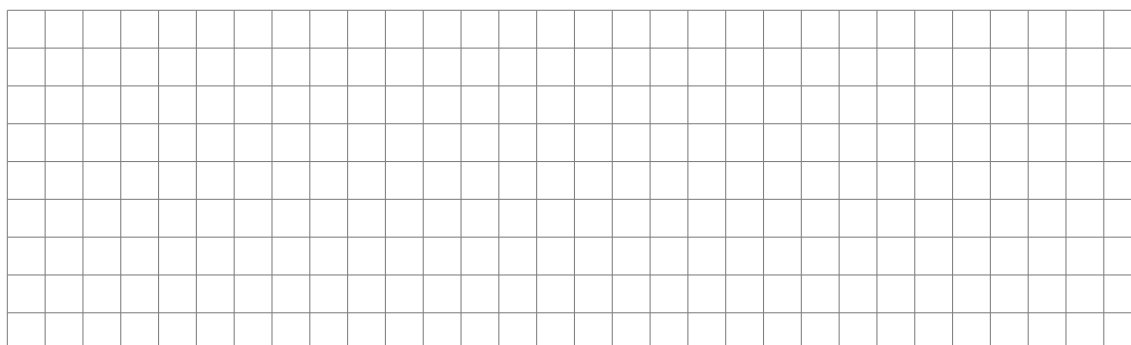


3 Matrices symétriques

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X | Y \rangle = X^T Y$.

Proposition 3.1. *Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.*

Preuve :



Théorème 3.2. Théorème spectral

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^T \iff D = P^{-1}AP = P^T AP$$

Autrement dit :

"Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée"

Remarque 3.3. *Pour diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée il faut donc faire très attention au choix des vecteurs propres : il faut qu'ils forment une base orthonormée pour que la matrice de passage soit orthogonale.*

Application 3.4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonaliser A selon une base orthonormée.

