Programme de khôlle 17

Semaine du 8 février 2021

La khôlle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Étudier la monotonie des suites de termes généraux suivants :
   (a) $u_n = n + (\frac{1}{2})^n$
   (b) $u_n = \frac{3^n}{n+1}$
   (c) $u_n = \frac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$
2. Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4**. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :*

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n+2b_n}{5} \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{l} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = \frac{2a_n+3b_n}{5} \end{array}\right.$$

1. *Montrer que la suite (d_n) dont le terme général est $d_n = b_n - a_n$ est une suite géométrique dont on identifiera le premier terme ainsi que la raison.*
2. *Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Qu'en conclure sur leur limite éventuelle ? On notera ℓ une éventuelle limite.*
3. *Justifier que la suite (r_n) de terme général $r_n = a_n + b_n$ est constante.*

4. En déduite la valeur de ℓ.

Exercice 2.2. *On considère la suite (u_n) définie par* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

1. *Justifier que la suite (u_n) est bien définie.*
2. *Montrer que (u_n) est majorée par 2.*
3. *Montrer que la suite est croissante.*
4. *(u_n) est-elle convergente ?*

Exercice 2.3. *On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec :*

$$f(x) = x^2 + \tfrac{3}{16} \text{ et } u_0 \geq 0$$

1. *Étudier f ainsi que le signe de $f(x) - x$.*
2. *On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$.*
   (a) *Montrer que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *Montrer que (u_n) est croissante.*
   (c) *(u_n) est-elle convergente ?*
3. *On suppose maintenant que $u_0 \in [1/4; 3/4]$.*
   (a) *Montrer que $u_n \in [1/4; 3/4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *Montrer que (u_n) est décroissante et minorée.*
   (c) *(u_n) est-elle convergente ?*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.27 : Généralités sur les suites réelles

1. Modes de définition d'une suite.
2. Opérations sur les suites.
3. Encadrement et variations d'une suite.
3.1 Suites minorées, majorées et bornées.
3.2 Monotonie d'une suite.
4. Suites arithmétiques et géométriques.

Chap.28 : Limite d'une suite réelle

1. Limite d'une suite
2. Opérations sur les limites de suite
3. Théorèmes d'existence d'une limite
3.1 Encadrement et limite
3.2 Théorème de la limite monotone
3.3 Suites adjacentes