

Exercices

Chap.3 : Intégrales

Rappels et généralisation

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Exercice 1.1. Uniquement à l'aide du tableau des primitives donné dans le formulaire scientifique interdisciplinaire, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$
2. $\int_2^3 \frac{1}{t \ln(t)} dt$
3. $\int_{-1}^1 |x^2 - x| dx$
4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Exercice 1.2. À l'aide du théorème d'intégration par partie, et du tableau des primitives usuelles, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$
2. $\int_1^3 x^3 \ln(x) dx$
3. $\int_0^{1/2} \arcsin(x) dx$

Exercice 1.3. À l'aide des changements de variable indiqués, calculer les intégrales données.

1. $\int_0^1 \frac{x}{2x+1} dx$, en posant $t = 2x + 1$.
2. $\int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$, en posant $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
3. $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(1+x)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$, en posant $u = \frac{x}{x+1}$.

Exercice 1.4. En utilisant judicieusement, soit les primitives des fonctions de la forme $\frac{u'(x)}{(u(x))^n}$, soit la décomposition en élément simple d'une fraction rationnelle, calculer les intégrales données.

1. $\int_0^1 \frac{3x+1}{(3x^2+2x+1)^3} dx$.
2. $\int_0^1 \frac{x^2-3x+4}{x^2-x-2} dx$
3. $\int \frac{1}{x^3-1} dx$.

Exercice 1.5. 1. Montrer que $\forall x \geq 0, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$.

Exercice 1.6. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} .

1. On suppose que f est paire. Montrer que $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
Indication : utiliser la relation de Chasles et le changement de variable $u = -t$, mais de façon judicieuse....
2. On suppose que f est impaire. Calculer $\int_{-a}^a f(t)dt$.

Exercice 1.7. Soit $x \in [0; 1]$ et f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = \ln(1 + t)$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $f^{(k)}(t)$. (Calculer les premières dérivées puis conjecturer et démontrer le résultat pour k quelconque.)
2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0; x]$ à la fonction f , montrer que :

$$\left| \ln(1 + x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

3. Qu'en déduit-on sur la série $\sum \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$?

Exercice 1.8. On cherche à calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^3}$.

1. Mettre la somme sous la forme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, en choisissant bien la fonction f .
2. Appliquer alors le théorème de la moyenne avec la fonction f déterminée ci-dessus et $a = 0$ et $b = 1$, pour calculer la limite demandée.

Exercice 1.9. A l'aide du théorème de la moyenne, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4}$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

2 Suites d'intégrales

Exercice 2.1. Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
2. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n .
3. Expliciter I_n en fonction de n . (Distinguer le cas n pair et le cas n impair).

4. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_{n+1}$.
5. Montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ est constante. En déduire un équivalent de I_n en l'infini.
6. Montrer la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n(2n)!}} = \sqrt{\pi}$.

3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Exercice 3.1. On définit f sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-1) \lfloor x^2 \rfloor$.

1. Montrer que f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
2. Calculer $\int_1^2 f(x) dx$.

4 Extension de la notion d'intégrale

Exercice 4.1. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et en cas de convergence donner leur valeur :

1. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
3. $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$
4. $\int_0^{+\infty} 1 dt$
5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$
6. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$
7. $\int_0^{+\infty} \cos(x) dx$

5 Utilisation des critères de convergence

Exercice 5.1. À l'aide du critère des équivalents, déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}} dt$
3. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1} dx$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4} dx$
5. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

Exercice 5.2. 1. On souhaite déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)} dt$.

- (a) Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?
 - (b) Déterminer un équivalent simple de $\frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$ en 0.
 - (c) Que peut-on dire de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$ et donc de la nature de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)} dt$?
2. En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de $\int_1^2 \frac{t^3-1}{\ln(t)} dt$

Exercice 5.3. 1. On souhaite déterminer la nature de $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$.

- (a) Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ?
 (b) Justifier que $\frac{1}{t^2-t} \sim \frac{1}{t-1}$.
 (c) Par la "méthode par calcul", déterminer la nature de $\int_1^2 \frac{1}{t-1} dt$.
 (d) Conclure quant à la nature de $\int_1^2 \frac{1}{t^2-t} dt$.
2. En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4} dx$.

Exercice 5.4. 1. On souhaite déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

- (a) Où se trouve(nt) le(s) problème(s) de convergence ? Quel est votre "intuition" quant à la réponse à ce(s) problème(s) ?
 (b) Déterminer un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha e^{-u^2} = 0$
 (c) Grâce à la question précédente, on peut dire qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u > c$, $e^{-u^2} \leq \frac{1}{u^\alpha}$. Conclure alors quant à la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
2. En s'inspirant de la méthode de la question 1., déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

6 Changement de variable

Exercice 6.1. 1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} dt$$

est-elle convergente ?

2. (a) Grâce au changement de variable $t = \frac{1}{x}$, montrer que :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} dx$$

- (b) En déduire que $I(a) = \frac{\pi}{4}$. (Indication : calculer $I(a) + I(a)$)

Exercice 6.2. 1. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$.

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$

2. A l'aide du changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

3. En calculant de deux manières la somme $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$, montrer que :

$$2I = -\frac{\pi}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin(u)) du$$

4. Montrer que $\int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(u)) du = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du$.

5. En exploitant les deux questions précédentes, déterminer la valeur de I .

7 Une intégrale semi-convergente

Exercice 7.1. 1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.

Indication : utiliser une intégration par partie sur une intégrale sur un segment bien choisi.

2. Montrer que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.

Indication : remarquer que pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t}$.

3. On admet que $I = \frac{\pi}{2}$. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$, montrer que l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2 dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

8 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 8.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Montrer que l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Quel est le sens de variation de f ?

3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.

(a) Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.

(b) En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

9 Fonction intégrables

Exercice 9.1. Supposons que I est un intervalle borné et que f est une fonction continue et bornée sur I . Montrer f est intégrable sur I .

Exercice 9.2. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que f est continue sur \mathbb{R}^+ , décroissante sur \mathbb{R}^+ et intégrable sur \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\int_x^{2x} f(t) dt \leq xf(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt$.

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} f(t) dt = 0$.

3. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.