

## Interrogation 2 - CORRECTION

On considère la courbe paramétrée suivante :  $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) - 3 \sin(t) \\ y(t) = -\cos(3t) + 3 \cos(t) \end{cases}$ .

1. Faire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions  $x$  et  $y$  et expliquer ce qui se passe au voisinage du point  $M(0)$  de la courbe.

On a  $\begin{cases} x(t) = -4t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 2 + 3t^2 + o(t^3) \end{cases}$ . Donc, au voisinage de  $M(0)$ ,  $(x(t), y(t)) = (0, 2) + (0, 3)t^2 + (-4, 0)t^3 + \vec{o}(t^3)$ .

Le point  $M(0)$  est donc un point de rebroussement de première espèce et la demi-tangente à la courbe au point  $M(0)$  est dirigée par le vecteur de coordonnées  $(0, 3)$  (demi-tangente verticale).

2. Réduire le domaine d'étude de la courbe.

- Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques donc il suffit de tracer la courbe sur un intervalle de longueur  $2\pi$  pour obtenir la totalité de la courbe. On réduit donc notre étude à  $[-\pi; \pi]$ .

- On a, pour tout  $t \in [-\pi; \pi]$ ,  $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ . On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle  $[0; \pi]$  et on obtiendra la courbe sur  $[-\pi; 0]$  par une symétrie d'axe  $(Oy)$ .

- On a, pour tout  $t \in [0; \pi]$ ,  $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ .

On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$  et on obtiendra la courbe sur  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$  par une symétrie d'axe  $(Ox)$ .

- Le calcul de  $x(\frac{\pi}{2} - t)$  ne donne rien de remarquable donc on ne peut pas plus restreindre notre étude.

3. Montrer que  $\begin{cases} x'(t) = -6 \sin(2t) \sin(t) \\ y'(t) = 6 \cos(2t) \sin(t) \end{cases}$ .


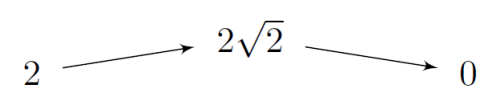
On a tout d'abord :

$$x'(t) = 3 \cos(3t) - 3 \cos(t) = 3(\cos(2t + t) - \cos(2t - t)) = -6 \sin(2t) \sin(t).$$

De même :

$$y'(t) = 3 \sin(3t) - 3 \sin(t) = 6 \cos(2t) \sin(t).$$

4. Dresser le tableau de variations et étudier les point singuliers et remarquables.

$t$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$x'(t)$	$\dot{0}$	$-$	$-$	$\dot{0}$
$x(t)$	$0$			$-4$
$y'(t)$	$\dot{0}$	$+$	$\dot{0}$	$-$
$y(t)$	$2$			$0$

Le point  $M(0)$ , étudié à la première question, est un point de rebroussement de première espèce.

En  $M(\pi/4)$ , la courbe possède une tangente horizontale.

En  $M(\pi/2)$ , la courbe possède une tangente verticale.

5. Tracer l'allure de la courbe.

