Interrogation 2 - CORRECTION

On considère la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) - 3\sin(t) \\ y(t) = -\cos(3t) + 3\cos(t) \end{cases}$.

1. Faire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions x et y et expliquer ce qui se passe au voisinage du point $M(0)$ de la courbe.
   On a $\begin{cases} x(t) = -4t^3 + o(t^3) \\ y(t) = 2 + 3t^2 + o(t^3) \end{cases}$. Donc, au voisinage de $M(0)$, $(x(t), y(t)) = (0,2) + (0,3)t^2 + (-4,0)t^3 + \vec{o}(t^3)$.
   Le point $M(0)$ est donc un point de rebroussement de première espèce et la demi-tangente à la courbe au point $M(0)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $(0,3)$ (demi-tangente verticale).
2. Réduire le domaine d'étude de la courbe.

   - Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc il suffit de tracer la courbe sur un intervalle de longueur 2π pour obtenir la totalité de la courbe. On réduit donc notre étude à $[-\pi;\pi]$.
   - On a, pour tout $t \in [-\pi;\pi]$, $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$. On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle $[0;\pi]$ et on obtiendra la courbe sur $[-\pi;0]$ par une symétrie d'axe (Oy).
   - On a, pour tout $t \in [0;\pi]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$.
     On peut donc restreindre notre étude à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ par une symétrie d'axe (Ox).
   - Le calcul de $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ ne donne rien de remarquable donc on ne peut pas plus restreindre notre étude.
3. Montrer que $\begin{cases} x'(t) = -6\sin(2t)\sin(t) \\ y'(t) = 6\cos(2t)\sin(t) \end{cases}$.
   On a tout d'abord :
   $$x'(t) = 3\cos(3t) - 3\cos(t) = 3(\cos(2t+t) - \cos(2t-t)) = -6\sin(2t)\sin(t).$$
   De même :
   $$y'(t) = 3\sin(3t) - 3\sin(t) = 6\cos(2t)\sin(t).$$

4. Dresser le tableau de variations et étudier les point singuliers et remarquables.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0
$x(t)$	0	$\searrow$		$\searrow$	-4
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$y(t)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Le point $M(0)$, étudié à la première question, est un point de rebroussement de première espèce.
En $M(\pi/4)$, la courbe possède une tangente horizontale.
En $M(\pi/2)$, la courbe possède une tangente verticale.

5. Tracer l'allure de la courbe.