# Interpolation polynomiale de Lagrange

D'après le dictionnaire de l'Acédémie Française :

***Interpolation :*** *XIVe siècle. Emprunté du latin impérial interpolatio, « action de changer çà et là », puis « altération, erreur ».*

En mathématiques : intercalation, entre certaines valeurs d'une fonction, de valeurs qu'on calcule par approximation et qui permettent d'établir une continuité de la fonction et de sa représentation graphique.

## Table des matières

Pour les différents scripts Python, nous importons les bibliothèques suivantes :

```
from sympy import *
import matplotlib.pyplot as plt
import math
init_printing()
x = Symbol('x')
```

Dans tout ce qui suivra :

1. $n$ désigne un entier naturel.
2. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ sont $n+1$ points distincts de $I$.
4. $f$ est une fonction de $I$ vers $\mathbb{R}$.

# 1 Le problème de l'interpolation

**Problème :** trouver un polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$ tel que :

$$\forall i \in [\![0; n]\!], P\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$$

Nous allons voir que ce problème admet une unique solution. Le polynôme correspondant est appelé le **polynôme d'interpolation** de $f$ aux points $x_i$.

Nous allons dans ce cours :

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un tel polynôme.
2. Calculer efficacement la valeur du polynôme d'interpolation en un point $x$.
3. Majorer $|f(x) - P(x)|$ pour $x \in I$.
4. Voir comment rendre ce majorant aussi petit que possible en choisissant astucieusement les $x_i$.

# 2 Les polynômes élémentaires de Lagrange

**Définition 2.1.** *Pour $k = 0, \ldots, n$ le **kième polynôme de Lagrange** est le polynôme :*

$$L_k = \frac{\prod\limits_{j \neq k} X - x_j}{\prod\limits_{j \neq k} x_k - x_j}$$

*C'est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ qui s'annule en tous les $x_j$, sauf en $x_k$ où il prend la valeur 1.*

**Proposition 2.2.** *$\mathscr{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.*

**Preuve :**
Comme $Card\mathscr{B} = \dim \mathbb{R}_n[X]$ il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre.
Soient $\lambda_k, k = 0, 1, \ldots, nn + 1$ réels. Supposons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k = 0$$

On a :

$$\forall (i, k) \in [\![0; n]\!]^2, L_k\,(x_i) = \delta_{ki}$$

où le symbole de Kronecker $\delta_{ki}$ vaut 1 si $k = i$ et 0 sinon. Évaluons l'égalité ci-dessus en $x_i$. Il vient :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k\,(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \delta_{ki} = \lambda_i$$

ceci pour tout $i$. D'où la liberté.

Tout polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$ est donc combinaison linéaire des $L_k$, d'où leur nom "élémentaires".

**Sous Python :**
La fonction ***lagrange*** ci-dessous prend en paramètre un entier $k$, un réel $x$ et une liste $xs = [x_0, \ldots, x_n]$ de réels distincts. Elle renvoie $L_k(x)$.

```
def lagrange(k, x, xs):
    p = 1
    n = len(xs) - 1
    for j in range(n + 1):
        if j != k:
            p *= (x - xs[j]) / (xs[k] - xs[j])
    return p
```

Ayant défini au préalable $x$ comme un symbole, nous pouvons donc obtenir une expression explicite des $L_k$ :

```
In [6]: expand(lagrange(1, x, [-2, -1, 0, 1, 2]))
```

Out[6]:

$$-\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{2x^2}{3}-\frac{2x}{3}$$

```
In [7]: expand(lagrange(2, x, [-2, -1, 0, 1, 2]))
```

Out[7]:

$$\frac{x^4}{4}-\frac{5x^2}{4}+1$$

## 3 Subdivisions régulières

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.
Une subdivision du segment $[a, b]$ est une suite :

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, la subdivision régulière à $n+1$ points de $[a, b]$ est définie par :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, k = 0, \ldots, n$$

**Sous Python :**

```
def subdi(a, b, n):
    d = (b - a) / n
    return [a + k * d for k in range(n + 1)]
```

On obtient par exemple une subdivision régulière à 11 points de l'intervalle $[-1; 1]$ :

```
In [8]: def subdi(a, b, n):
            d = (b - a) / n
            return [a + k * d for k in range(n + 1)]

In [10]: xs = subdi(-1, 1, S(10))
         xs
```

Out[10]:

$$\left[-1, \ -\frac{4}{5}, \ -\frac{3}{5}, \ -\frac{2}{5}, \ -\frac{1}{5}, \ 0, \ \frac{1}{5}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{3}{5}, \ \frac{4}{5}, \ 1\right]$$

# 4 Graphes des polynômes élémentaires

Nous pouvons maintenant effectuer quelques petits affichages.
Commençons par le graphe des polynômes élémentaires. Pour :

```
xs = subdi(-1,1,S(3))
ps = [expand(lagrange(k, x, xs)) for k in range(len(xs))]
```

On obtient :

```
In [8]: xs
Out[8]:
```

$$\left[-1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right]$$

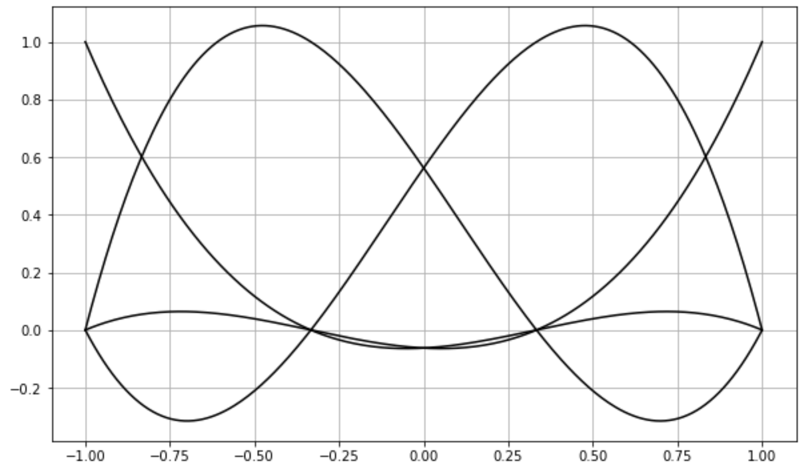
```
In [9]: ps
Out[9]:
```

$$\left[-\frac{9x^3}{16}+\frac{9x^2}{16}+\frac{x}{16}-\frac{1}{16},\ \frac{27x^3}{16}-\frac{9x^2}{16}-\frac{27x}{16}+\frac{9}{16},\ -\frac{27x^3}{16}-\frac{9x^2}{16}+\frac{27x}{16}+\frac{9}{16},\ \frac{9x^3}{16}+\frac{9x^2}{16}-\frac{x}{16}-\frac{1}{16}\right]$$

La fonction ***tracer_poly*** qui suit trace la courbe de $p$ pour $x$ entre xmin et xmax.
Les paramètres optionnels de la fonction sont passés à *plt.plot*.

```
def tracer_poly(p, xmin, xmax, *opt1, **opt2):
    xs = subdi(xmin, xmax, 300)
    ys = [p.subs(x, t) for t in xs]
    plt.plot(xs, ys, *opt1, **opt2)
```

Voici le graphique obtenu :




**Exercice 4.1.** *Parmi les quatre graphiques ci-dessus, retrouver les polynômes d'interpolation de Lagrange correspondants.*

# 5 Le polynôme d'interpolation

**Proposition 5.1.** *Il existe un unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $n$ tel que $P(x_k) = f(x_k)$ pour $k = 0, \ldots, n$. Le polynôme $P$ est donné par*

$$P = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k$$

*où les $L_k$ sont les polynômes élémentaires de Lagrange.*

**Preuve :**
Soit $P$ le polynôme défini ci-dessus. Tout d'abord, $P$ est de degré inférieur ou égal à $n$.
De plus, pour $i = 0, 1, \ldots, n$ :

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x_i) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \delta_{ki} = f(x_i)$$

Ce polynôme est donc solution du problème. Par ailleurs, supposons que $P$ et $Q$ sont solutions.
Le polynôme $P - Q$ est de degré inférieur ou égal à $n$ et s'annule en les $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$. C'est donc le polynôme nul.
D'où l'unicité.

La fonction ***interpoler(f,xs)*** prend en paramètres une fonction $f$ et une liste $xs$ de points.
Elle renvoie le polynôme d'interpolation de $f$ aux points de la liste $xs$ .

```python
def interpoler(f,xs):
    ps=[lagrange(k, x, xs) for k in range(len(xs))]
    p=0
    n = len(xs)
    for k in range(n):
        p = p + f(xs[k]) * ps[k]
    return p
```

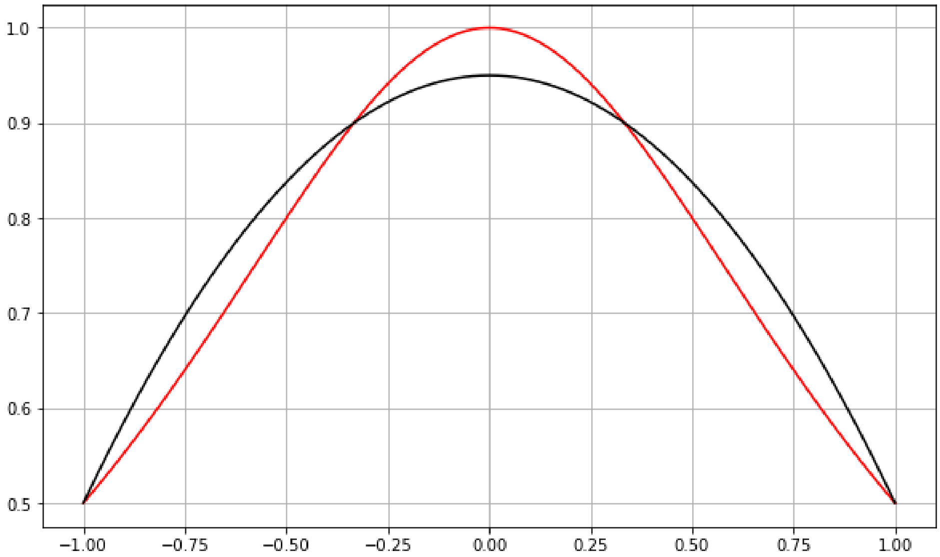
Testons sur un petit exemple : prenons $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et interpolons sur une subdivision de $[-1, 1]$.
Nous allons fréquemment utiliser cette fonction dans toute la suite, alors appelons-la *exemple.*

```python
def exemple(x):
    return 1 / (x ** 2 + 1)

p = expand(interpoler(exemple, subdi(-1, 1, S(3))))
xs = subdi(-1, 1, 300)
ys = [exemple(t) for t in xs]
```

```
plt.plot(xs, ys, 'r')
tracer_poly(p, -1, 1, 'k')
plt.grid()
plt.show()
```

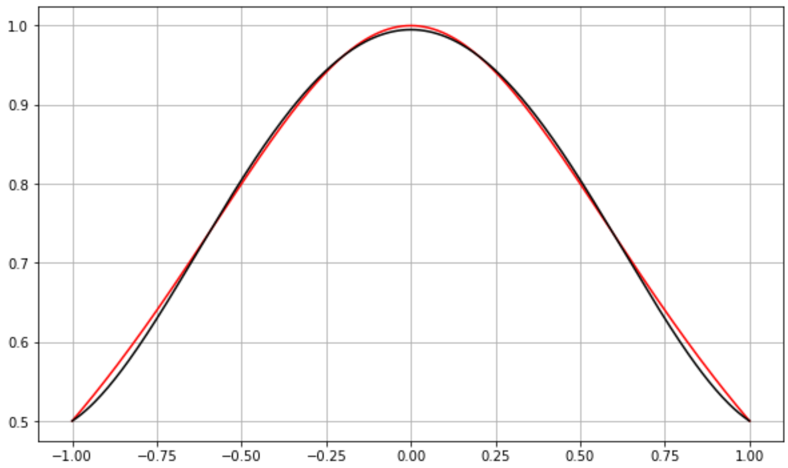
On obtient :




Que se passe-t-il si on augmente le nombre de points de la subdivision ?

```
p = expand(interpoler(exemple, subdi(-1, 1, S(5))))
xs = subdi(-1, 1, 300)
ys = [exemple(t) for t in xs]
plt.plot(xs, ys, 'r')
tracer_poly(p, -1, 1, 'k')
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient :



# 6 Estimation de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange

Avant de donner une estimation de l'erreur, nous allons démontrer la propriété suivant.

**Proposition 6.1.** *Soit $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$ alors, si $f$ possède au moins $n + 2$ zéros distincts sur $[a, b]$, $f'$ possède au moins $n + 1$ zéros distincts sur $[a, b]$.*

**Preuve :**
il suffit d'appliquer le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de $f$.

**Corollaire 6.2.** *Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a, b])$. Si $f$ possède au moins $n + 2$ zéros distincts sur $[a, b]$, alors $f^{(n+1)}$ a au moins un zéro sur $[a, b]$.*

**Preuve :** il suffit de faire une récurrence en appliquant la propriété précédente.

Soit $f$ une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ et soient :

$$a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b,$$

$n + 1$ points de $[a, b]$.
On note $P$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_0, \ldots, x_n$.

**Théorème 6.3.** *On suppose $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a, b])$, alors :*

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi \in [a, b], f(x) - P(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

**Preuve :**
si $x = x_i$, alors la relation est vérifiée.

Soit $x \in [a, b]$ fixé, $x$ différent de tous les $x_i$.
Posons $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ et :

$$W(t) = f(t) - P(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P(x)).$$

La fonction $W$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ comme $f$ et s'annule pour $t = x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ ; elle admet donc au moins $n + 2$ zéros.
D'après le corollaire 8 :

$$\exists \xi \in [a, b], W^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

On en déduit la relation.

Le point $\xi$ étant inconnu, on cherche une majoration et on a le corollaire immédiat :

**Corollaire 6.4.** *Si $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, alors :*

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Autrement dit, pour tout $x \in [a,b]$ :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|Q(x)|$$

si :

- $M_{n+1}$ est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a;b]$
- $Q(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

**Remarque 6.5.** *La majoration que nous venons d'obtenir est intéressante :*

- *le facteur $(n+1)$ ! au dénominateur est prometteur, puisqu'il tend très vite vers $+\infty$ lorsque $n$ augmente.*
- *le facteur $M_{n+1}$ ne dépend que de $f$ et pas des $x_i$.*
- *le facteur $|Q(x)|$ ne dépend que des $x_i$ et de $x$, et pas de $f$. De plus :*

$$\forall x \in [a,b], |Q(x)| \leq (b-a)^{n+1}$$

*Une autre majoration de l'erreur d'approximation devient :*

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$

**Exemple 6.6.** *Si $f(x) = cos(x)$ ou $f(x) = sin(x)$ alors $M_{n+1} \leq 1$ et :*

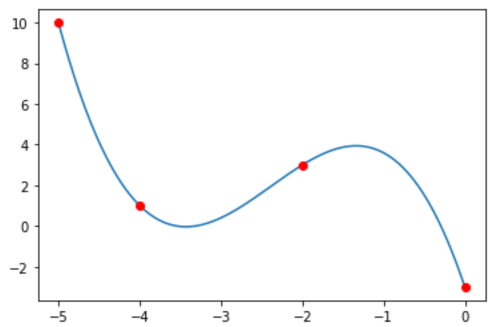
$$\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

# 7 Application

Tracer la courbe d'une fonction polynomiale passant par les points de coordonnées :

$$(-5;10), (-2,3), (-4,1) \text{ et } (0,-3).$$

On doit obtenir :


10
8
6
4
2
0
−2
−5
−4
−3
−2
−1
0