Chap.22 : Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices échelonnées, échelonnées réduites

Définition 1.1. *Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\boldsymbol{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$.*
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. *On dit que la matrice A est **échelonnée** lorsqu'elle satisfait les deux conditions suivantes :*
   (a) *si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;*
   (b) *à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2. *Lorsque A est échelonnée, on appelle **pivots** les premiers coefficients non nuls de chaque ligne, en partant de la gauche.*

Application 1.2. *Les matrices suivantes sont échelonnées, entourer les pivots :*

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 1.3. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée. On dit que la matrice A est **échelonnée réduite** lorsque ses pivots sont 1 et que les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leurs colonnes.*

Exemple 1.4. *Les matrices suivantes sont échelonnées réduites. Les pivots sont en gras :*

1. $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Une matrice ne comportant que des 0 *est échelonnée réduite.*

Remarque 1.5. *Pour résoudre des systèmes linéaires, il nous reste à voir :*

- *comment passer, par opérations élémentaires, d'une matrice quelconque à une matrice échelonnée réduite : c'est l'**algorithme de Gauss-Jordan** ?*
- *Comment résoudre un système dont la matrice est échelonnée réduite ?*

2 Algorithme de Gauss-Jordan

Le principe de l'algorithme de Gauss-Jordan est de travailler colonne par colonne, de la gauche vers la droite. Par opérations élémentaires successives, on aboutit à une matrice échelonnée réduite.
Afin de mieux comprendre le fonctionnement de cet algorithme, on va le scinder en deux :

- un premier algorithme va échelonner la matrice ;
- un second la réduira.

2.1 Échelonnement de matrice

Algorithme d'échelonnement de matrice
Entrée : une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Sortie : une matrice échelonnée, équivalente en lignes à A.

- Si la première colonne de A ne comporte que des 0 alors :
  - Soit $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et alors A est échelonnée.
  - Soit
  $$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \hat{A} \\ 0 & \end{array}\right)$$
  et on recommence l'algorithme avec la matrice $\hat{A}$
- Sinon, il existe un coefficient non nul dans la première colonne :

- Quitte à permuter deux lignes, on peut supposer que c'est le coefficient $a_{1,1}$
- $L_1 \longleftarrow \frac{1}{a_{1,1}} L_1$ permet d'obtenir 1 en premier coefficient, ce sera le pivot.

  On a alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ a_{2,1} & \dots & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$
- Pour $2 \leq i \leq n$, on réalise l'opération $L_i \longleftarrow L_i - a_{i,1} L_1$.
  Cela permet d'annuler le premier coefficient de chaque ligne à partir de la deuxième. On obtient une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  ou bien $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ si $p = 1$.

  Dans le premier cas, on recommence l'algorithme avec la matrice $\hat{A}$, dans le second, la matrice est déjà échelonnée.

Remarque 2.1. *Cet algorithme fait appel à lui-même, on dit qu'il est récursif. A chaque étape, le nombre de colonnes de la matrice à traiter diminue de 1, ce qui garantit qu'au bout d'un certain nombre d'itérations, la matrice sera une colonne et l'algorithme s'arrêtera après avoir échelonné cette colonne.*

Exemple 2.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim_L \left[L_1 \longleftarrow \frac{1}{3} L_1 \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
$\sim_L \left[\begin{smallmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1 \end{smallmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim_L \left[L_2 \longleftarrow \frac{-1}{7} L_2 \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$
$\sim_L \left[L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{41}{7} \end{pmatrix} \sim_L \left[L_3 \longleftarrow \frac{7}{41} L_3 \right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 2.3. *Cet algorithme fait un peu plus qu'échelonner la matrice, il s'assure que les pivots valent tous 1.*

Application 2.4. *Donner une matrice échelonnée équivalente à* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2.2 Réduction d'une matrice échelonnée

Entrée : une matrice échelonnée $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les pivots valent 1.
Sortie : une matrice échelonnée réduite, équivalente en lignes à A.

On va traiter chaque colonne de A, de la gauche vers la droite, à partir de la deuxième.
Pour $j \in [\![2; p]\!]$:

- s'il n'y a pas de pivot sur la colonne j, on ne fait rien ;
- sinon, le pivot est sur la ligne i, la colonne j est de la forme $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i-1,j} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

  Pour chaque ligne $k > i$, on fait $L_k \longleftarrow L_k - a_{k,j} L_i$, ce qui annule les coefficients au-dessus du pivot.

Exemple 2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \left[\begin{smallmatrix} L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_3 \end{smallmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\sim_L \left[L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2 \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 2.6.
- *L'algorithme de Gauss-Jordan prouve qu'une matrice quelconque est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite. On peut préciser que* ***cette matrice échelonnée réduite est unique****.*
- *Il existe une version itérative de cet algorithme qui aurait simultanément échelonné et réduit la matrice. C'est sous cette forme que nous implémenterons l'algorithme sous Python.*

Application 2.7. *Grâce à l'algorithme de Gauss, montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est équivalente à la matrice échelonnée réduite* $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Résolution d'un système dont la matrice est échelonnée réduite

Dans ce qui suit, $\mathscr{S}$ désigne un système linéaire à n équations et p inconnues, A sa matrice et $(A \mid B)$ sa matrice augmentée.
On va appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur $\mathscr{S}$, A et $(A \mid B)$ et on obtient $\mathscr{S}'$, le système échelonné réduit équivalent à $\mathscr{S}$, A' sa matrice et $(A' \mid B')$ sa matrice augmentée.
Il est à noter qu'en plus de leur existence, l'algorithme du pivot de Gauss garantit l'unicité de $\mathscr{S}'$, le système échelonné réduit équivalent à $\mathscr{S}$, A' et $(A' \mid B')$.

Définition 3.1. *On appelle rang du système (et de sa matrice A) le nombre de pivots de A'. On les note* $\boldsymbol{rg(\mathscr{S})}$ *(et* $\boldsymbol{rg(A)}$ *).*

Les inconnues correspondants aux pivots sont appelées ***inconnues principales****, les autres sont appelées* ***inconnues secondaires (ou paramètres)****.*

Proposition 3.2. *Le rang étant le nombre de pivots, on a :*

$$rg(\mathscr{S}) \leq min(n, p)$$

Théorème 3.3. ***Critère de compatibilité d'un système***
Le système $\mathscr{S}$ est compatible et, et seulement si, toutes les lignes nulles de

A' correspondent à un coefficient nul de B'.
Lorsque c'est le cas, les solutions du système sont obtenues en exprimant les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemple 3.4. *Résolvons le système $\mathscr{S}$: $\begin{cases} 3x - y - 2z = 2 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$.*
La matrice augmentée de $\mathscr{S}$ est $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$(A \mid B) \sim_L [L_1 \longleftarrow \frac{1}{3}L_1] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_L$
$[L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right) \sim_L [L_2 \longleftarrow \frac{3}{2}L_2] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right) \sim_L$
$[L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2] \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{11}{2} \end{array}\right)$

$\mathscr{S}$ est donc équivalent à $\mathscr{S}'$: $\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = \frac{5}{2} \\ y + \frac{7}{2}z = \frac{11}{2} \end{cases}$ Les inconnues principales sont x et y, on les exprime en fonction du paramètre z : $\mathscr{S}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z + \frac{5}{2} \\ y = -\frac{7}{2}z + \frac{11}{2} \end{cases}$
$\mathscr{S}$ admet donc une infinité de solution :

$$Sol_{\mathscr{S}} = \left\{(-\tfrac{1}{2}z + \tfrac{5}{2}, -\tfrac{7}{2}z + \tfrac{11}{2}, z), z \in \mathbb{R}\right\}$$

Application 3.5. *On donne les matrices augmentées $(A_i \mid B_i)$ associées à des systèmes $\mathscr{S}_i$. Déterminer le rang, les inconnues principales et secondaires, et son éventuelle compatibilité.*

1. $(A_1 \mid B_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$
2. $(A_2 \mid B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$
3. $(A_3 \mid B_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$
4. $(A_4 \mid B_4) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Application 3.6. *Résoudre le système suivant par l'algorithme de Gauss-Jordan :* $\mathscr{S} : \begin{cases} 2x+3y=3 \\ x+2y=5 \\ 3x+2y=14 \end{cases}$ *. On précisera le rang du système.*

Théorème 3.7. ***Nombre de solutions d'un système compatible***
Soit $\mathscr{S}$ *un système compatible à* n *équations et* p *inconnues :*

- *si* $rg(\mathscr{S}) = p$ *alors le système admet une unique solution ;*
- *si* $rg(\mathscr{S}) < p$ *alors le système admet une infinité de solutions.*

Preuve :

- Si $rg(\mathscr{S}) = p$ alors les r premières lignes de $(A' \mid B')$ sont : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b'_p \end{array}\right)$

  et alors $\mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b'_1 \\ \vdots \\ x_p = b'_p \end{cases}$ dont l'unique solution est $(b'_1, ..., b'_p)$.
- Si $rg(\mathscr{S}) < p$ alors, quitte à permuter les noms des inconnues de façon à ce que les inconnues principales soient $x_1, ..., x_r$, les r premières

lignes de $(A' \mid B')$ sont : $\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1,p} & b'_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{r,p} & b'_r \end{array}\right)$ et

alors $\mathscr{S} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{1,p}x_p = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{2,p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{r,p}x_p = b'_r \end{array}\right.$.

Les inconnues principales sont exprimées en fonction des paramètres $x_{r+1}, ..., x_p$:

$\mathscr{S} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - (a'_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{1,p}x_p) \\ x_2 = b'_2 - (a'_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{2,p}x_p) \\ \vdots \\ x_r = b'_r - (a'_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a'_{r,p}x_p) \end{array}\right.$.

Pour chaque $(p-r)-$uplet $(x_{r+1}, ..., x_p) \in \mathbb{K}^{p-r}$, on obtient une solution de $\mathscr{S}$, qui admet donc une infinité de solutions $\square$

Application 3.8. *Pour les systèmes $\mathscr{S}_i$ compatibles de l'avant dernière application, déterminer les solutions.*