

Chap.37 : Calcul matriciel

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désignera \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n, p et q désigneront des entiers naturels non nuls.

1 Généralités sur les matrices

Définition 1.1. Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est un tableau de la forme :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, $a_{i,j}$ est le coefficient situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On dit qu'une matrice est de **taille** (n, p) .

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Quelques cas particuliers :

- Lorsque A n'a qu'une seule ligne ($n = 1$), on dit que c'est une **matrice ligne**.
- Lorsque A n'a qu'une seule colonne ($p = 1$), on dit que c'est une **matrice colonne**.
- Lorsque A a autant de lignes que de colonnes ($n = p$), on dit que c'est une **matrice carrée**. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n .
- La matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la **matrice nulle**, on la note $\mathbf{0}_{n,p}$.

Application 1.2. Compléter :

$$\begin{array}{ll} 1. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \dots & 4. D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \dots \\ 2. B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \dots & 5. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \dots \\ 3. C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix} \in \dots & \end{array}$$

Proposition 2.5. • L'addition des matrices est **commutative** :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, A + B = B + A$$

• L'addition des matrices admet un **élément neutre** : la matrice nulle.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$$

Pour toute matrice A , $-A = -1A$ est la **matrice opposée** de A :

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$$

L'addition des matrices est **associative** :

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3, (A + B) + C = A + (B + C)$$

Proposition 2.6. Pour tous $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

2.2 Produit de deux matrices

Définition 2.7. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On appelle produit de A par B la matrice C de taille (n, q) , notée $C = A \times B$, dont les coefficients sont :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$$

Méthode 2.8. $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \dots + a_{i,p} \times b_{p,j}$

On observe que $c_{i,j}$ est calculé à partir de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ ligne de B :

$$A = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \\ C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} & \cdots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots & C_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{iq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nj} & \cdots & C_{nq} \end{matrix} = A \times B$$

Application 2.9. Effectuer les produits matriciels suivants :

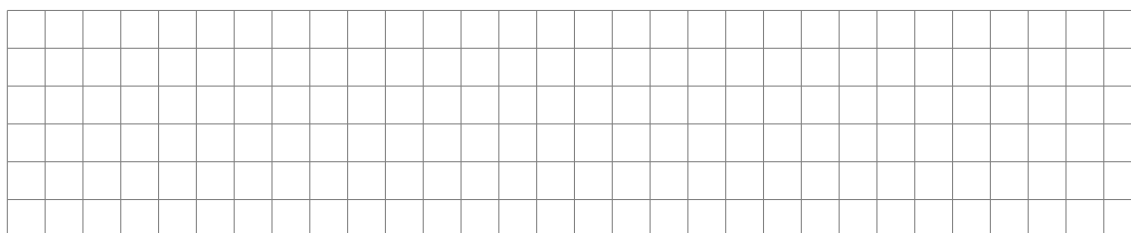
$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5. E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Remarque 2.10. • En général $A \times B \neq B \times A$: **le produit matriciel n'est pas commutatif !!!** D'autant plus que parfois, le produit $A \times B$ existe alors que ce n'est pas le cas de $B \times A$ (Cf. B et C de l'application précédente).

- Un produit matriciel peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul (Cf. D de l'application précédente).

Proposition 2.11. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors le produit $A \times X$ est la combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de X :

$$AX = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque 2.12. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $A \times B$ est le produit de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

La $i^{\text{ème}}$ ligne de $A \times B$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec B .

Proposition 2.13. Soient A, B et C des matrices (dont les tailles permettent de réaliser les sommes et produits ci-dessous) :

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- Associativité : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit des matrices est distributif par rapport à l'addition :

$$A(B + C) = AB + AC \text{ et } (A + B)C = AC + BC$$

3 Matrices carrées

3.1 Généralités

Définition 3.1. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice carrée de taille n .

- Les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ sont appelés **coefficients diagonaux** de A .
- On dit que A est une **matrice diagonale** lorsque ses coefficients non diagonaux sont nuls :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

- On dit que A est une **matrice triangulaire supérieure** lorsque ses coefficients au dessous de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

- On dit que A est une **matrice triangulaire inférieure** lorsque ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Exemple 3.2. • $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale ;

• $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2i \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure ;

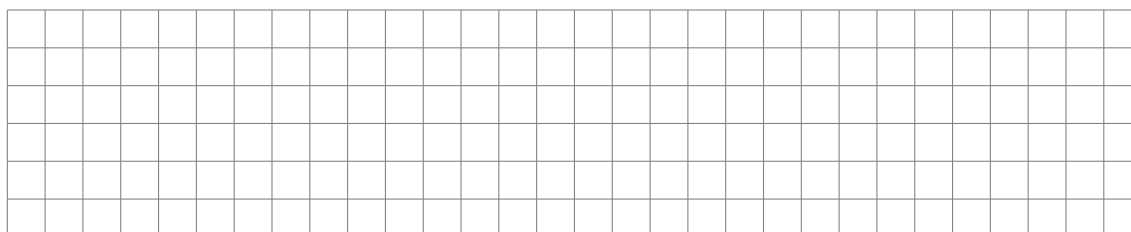
• $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2i \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Proposition 3.3. • Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut toujours calculer le produit de deux matrices.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Application 3.9. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_2$.
2. Calculer BA .
3. Que peut-on en déduire ?



Théorème 3.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$, c'est-à-dire A est **inversible à droite** ;
2. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$, c'est-à-dire A est **inversible à gauche** ;
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire A est **inversible**

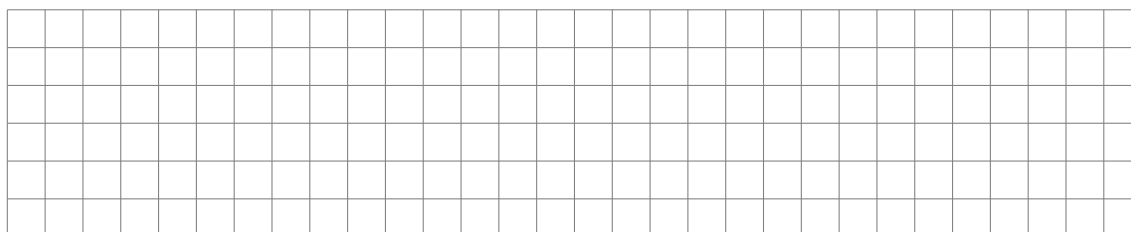
Remarque 3.11. • Dans l'application 3.9, nous avons d'abord cherché un inverse à droite de la matrice A . Dans un second temps, nous avons vérifié qu'il s'agissait également d'un inverse à gauche. Le théorème 3.10 nous assure que cette vérification était inutile.

- Pour obtenir l'inverse d'une matrice carrée de taille n , nous avons résolu un système à n^2 inconnues, ce qui devient vite très fastidieux lorsque n augmente. En pratique, nous utiliserons l'**algorithme de Gauss**.

On pourra se référer à la vidéo suivante : Recherche Inverse Matrice

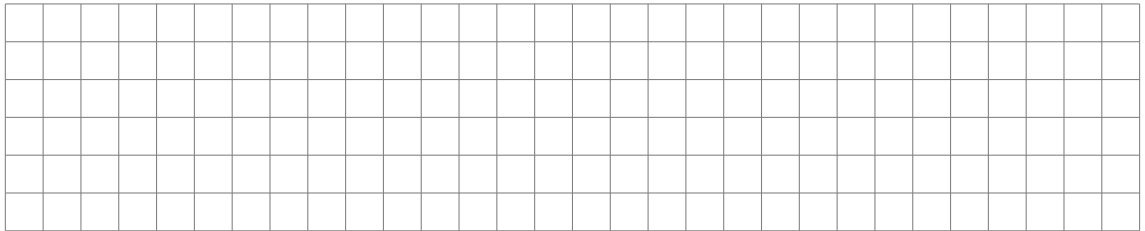
Application 3.12. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles et si oui quel est leur inverse ?



Application 3.13. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - A - 2I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner la valeur de A^{-1} .



3.3 Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires

On considère le système linéaire \mathcal{S} d'inconnues le p -uplet (x_1, \dots, x_p)

$$\text{suivant : } \mathcal{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On note alors :

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ la matrice associée au système } \mathcal{S} ;$$

$$\bullet B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ la matrice égale au second membre et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ la matrice colonne dont chaque coefficient correspond à une des inconnues } x_1, \dots, x_p.$$

Alors :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} = B$$

Ainsi, résoudre le système \mathcal{S} revient à trouver toutes matrices colonnes X qui vérifient $AX = B$.

Dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice colonne X vérifiant $AX = B$:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Théorème 3.14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible
2. $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; l'équation $AX = B$ admet une unique solution ;
3. le rang du système ayant pour matrice A est n .

Méthode 3.15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A' sa matrice échelonnée réduite équivalente.

A est inversible ssi pour toute matrice colonne B , l'équation $AX = Y$ admet pour unique solution $X = A^{-1}Y$.

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

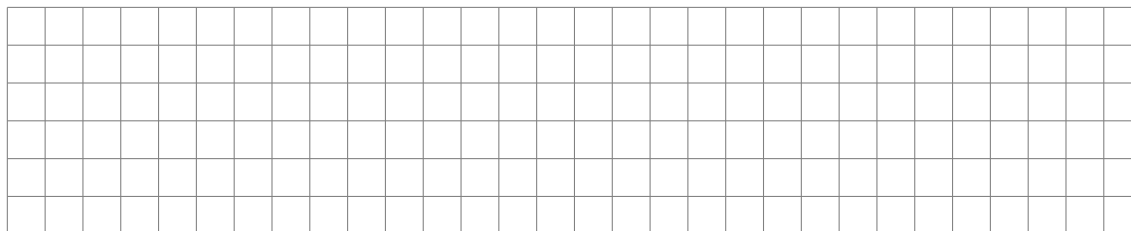
Pour déterminer l'inverse de A , on applique à la matrice augmentée $(A \mid Y)$ les opérations élémentaires qui transforment A en A' .

On obtient une nouvelle matrice augmentée $(A' \mid Y')$.

Deux possibilités :

- Si $A' = I_n$ alors A est inversible et $Y' = A^{-1}Y$: on obtient alors A^{-1} en lisant les coefficients du second membre.
- Sinon, A n'est pas inversible.

Application 3.16. Déterminer si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Si oui, donner sa matrice inverse.



Proposition 3.17. $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par produit : si A et B sont deux matrices inverses alors AB l'est également.

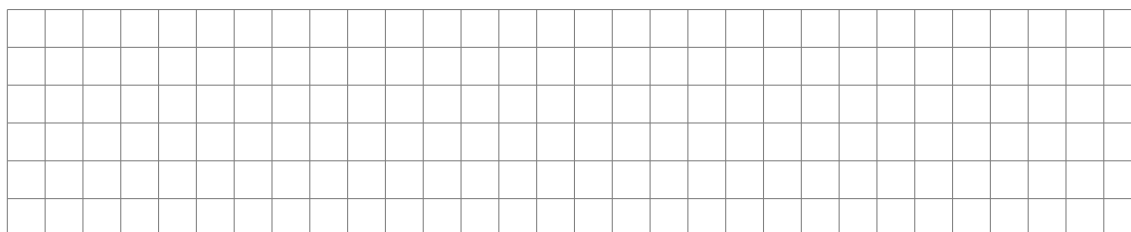
De plus :

$$\forall (A, B) \in (GL_n(\mathbb{K}))^2, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Application 3.18. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter la matrice $A = PDP^{-1}$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer la matrice A^{-1} .



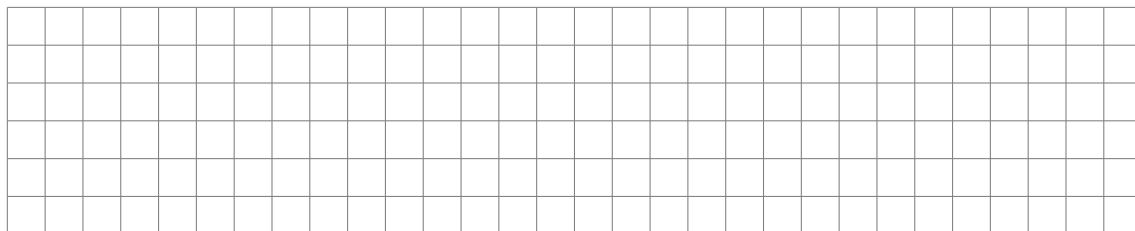
4 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Proposition 4.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

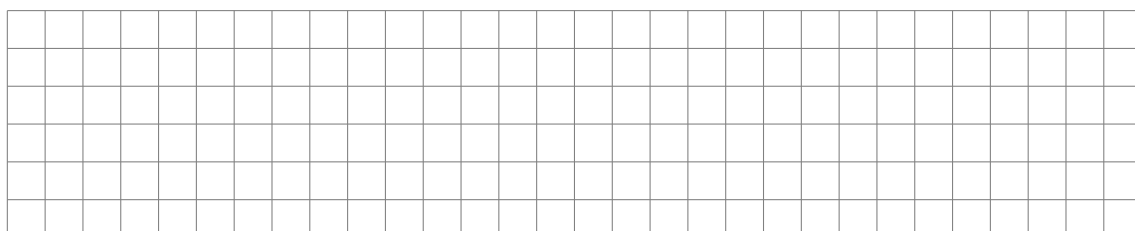
Alors l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$ est linéaire. C'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$$

Elle est appelée l'**application linéaire canoniquement associée à la matrice A** .



Application 4.11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Ker}(A)$.



Définition 4.12. On appelle image de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des images de l'application $f : X \mapsto AX$.

L'image de A est notée $\mathbf{Im}(A)$, c'est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\mathbf{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

Proposition 4.13. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors :

$$\mathbf{Im}(A) = \text{Vect}(A_1, \dots, A_p)$$