# Chap.37 : Calcul matriciel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n, p$ et $q$ désigneront des entiers naturels non nuls.

## 1 Généralités sur les matrices

**Définition 1.1.** *Une **matrice** à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de la forme :*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

*Pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p, a_{i,j}$ est le coefficient situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.*
*On dit qu'une matrice est de **taille** $(n,p)$.*
*L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\boldsymbol{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$.*
*Quelques cas particuliers :*

- *Lorsque $A$ n'a qu'une seule ligne ($n = 1$), on dit que c'est une **matrice ligne**.*
- *Lorsque $A$ n'a qu'une seule colonne ($p = 1$), on dit que c'est une **matrice colonne**.*
- *Lorsque $A$ a autant de lignes que de colonnes($n = p$), on dit que c'est une **matrice carrée**. On note $\boldsymbol{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$.*
- *La matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée la **matrice nulle**, on la note $\mathbf{0}_{n,p}$.*

**Application 1.2.** *Compléter :*

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \ldots$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \ldots$
3. $C = \begin{pmatrix} -5 & 2 \end{pmatrix} \in \ldots$
4. $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \ldots$
5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \ldots$

**Application 1.3.** *Écrire explicitement les matrices* $A = (i+j)_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}$ *et* $B = (2i+j)_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}}$

# 2 Opérations sur les matrices

## 2.1 Combinaison linéaire de matrices

**Définition 2.1.** ***Multiplication par un scalaire.***
*Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.
*La matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de* $A$ *par* $\lambda$ *est notée* $\boldsymbol{\lambda A}$.
*Si* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ *alors* $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$

**Application 2.2.** *Calculer* $(2i-1)\begin{pmatrix} i & -1 \\ 2i+1 & -2i \end{pmatrix}$.

**Définition 2.3.** ***Somme de deux matrices.***
*Soient* $A$ *et* $B$ *deux matrices de même taille* $(n,p)$.
*On définit* $\boldsymbol{A+B}$ *comme la matrice de taille* $(n,p)$ *obtenue en additionnant les coefficients de* $A$ *et* $B$ *qui ont même position.*
*Si* $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ *et* $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ *alors :*

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

**Application 2.4.** $i\begin{pmatrix} 2i & 3 \\ -i+1 & -3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 3i-1 \\ 3 & 2+3i \end{pmatrix} =$

**Proposition 2.5.** • *L'addition des matrices est* ***commutative*** *:*

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2, A+B = B+A$$

• *L'addition des matrices admet un* ***élément neutre*** *: la matrice nulle.*

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$$

*Pour toute matrice $A$, $-A = -1A$ est la* ***matrice opposée*** *de $A$ :*

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$$

*L'addition des matrices est* ***associative*** *:*

$$\forall (A,B,C) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3, (A+B)+C = A+(B+C)$$

**Proposition 2.6.** *Pour tous $(A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ :*

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

## 2.2 Produit de deux matrices

**Définition 2.7.** *Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.*
*On appelle produit de $A$ par $B$ la matrice $C$ de taille $(n,q)$, notée $C = A \times B$ , dont les coefficients sont :*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

**Méthode 2.8.** $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + ... + a_{i,p} \times b_{p,j}$

*On observe que $c_{i,j}$ est calculé à partir de la $i^{ème}$ ligne de $A$ et de la $j^{ème}$ ligne de $B$ :*

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix} = A \times B$$

**Application 2.9.** *Effectuer les produits matriciels suivants :*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Remarque 2.10.**
- *En général $A \times B \neq B \times A$ :* ***le produit matriciel n'est pas commutatif ! ! !*** *D'autant plus que parfois, le produit $A \times B$ existe alors que ce n'est pas le cas de $B \times A$ (Cf. $B$ et $C$ de l'application précédente).*
- *Un produit matriciel peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul (Cf. $D$ de l'application précédente).*

**Proposition 2.11.** *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors le produit $A \times X$ est la combinaison linéaire des colonnes de $A$ avec les coefficients de $X$ :*

$$AX = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + ... + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$$

**Remarque 2.12.** *La $j^{\text{ème}}$ colonne de $A \times B$ est le produit de $A$ avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de $B$.*
*La $i^{\text{ème}}$ ligne de $A \times B$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $A$ avec $B$.*

**Proposition 2.13.** *Soient $A, B$ et $C$ des matrices (dont les tailles permettent de réaliser les sommes et produits ci-dessous) :*

- *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.*
- *Associativité : $(AB)C = A(BC)$.*
- *Le produit des matrices est distributif par rapport à l'addition :*

$$A(B+C) = AB + AC \text{ et } (A+B)C = AC + BC$$

# 3 Matrices carrées

## 3.1 Généralités

**Définition 3.1.** *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice carrée de taille $n$.*

- *Les coefficients $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n}$ sont appelés **coefficients diagonaux** de $A$.*
- *On dit que $A$ est une **matrice diagonale** lorsque ses coefficients non diagonaux sont nuls :*

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

- *On dit que $A$ est une **matrice triangulaire supérieure** lorsque ses coefficients au dessous de la diagonale sont nuls :*

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

- *On dit que $A$ est une **matrice triangulaire inférieure** lorsque ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls :*

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

**Exemple 3.2.**

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale ;*
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2i \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure ;*
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 2i \end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieure.*

**Proposition 3.3.**

- *Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut toujours calculer le produit de deux matrices.*
- *$\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit : $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On appelle* ***matrice identité*** *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *la matrice*

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*$I_n$ est l'**élément neutre** pour la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ :*

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = A = I_nA$$

**Définition 3.4.** *Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $\boldsymbol{A^k}$ en posant :*

$$A^0 = I_n \text{ et } A^k = A^{k-1} \times A$$

**Définition 3.5.** *Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On dit que $A$ et $B$ commutent lorsque $AB = BA$.*

**Proposition 3.6. *Formule du binôme.***
*Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $A$ et $B$ **commutent**, et soit $r \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$(A + B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k B^{r-k}$$

**Application 3.7.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = 2A$.*
*Que vaut alors $(A + I_n)^5$ ?*

## 3.2 Matrices carrées inversibles

**Définition 3.8.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $A$ est **inversible** lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

*On dit alors que $B$ est l'**inverse** de $A$ et on la note $A^{-1}$.*
*L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\boldsymbol{GL_n}(\mathbb{K})$ appelé **groupe linéaire** d'ordre $n$ de $\mathbb{K}$.*

**Application 3.9.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer une matrice* $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ *telle que* $AB = I_2$.
2. *Calculer* $BA$.
3. *Que peut-on en déduire ?*

**Théorème 3.10.** *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$, *c'est-à-dire* $A$ *est* ***inversible à droite*** *;*
2. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$, *c'est-à-dire* $A$ *est* ***inversible à gauche*** *;*
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *c'est-à-dire* $A$ *est inversible*

**Remarque 3.11.**

- *Dans l'application 3.9, nous avons d'abord cherche un inverse à droite de la matrice A. Dans un second temps, nous avons vérifié qu'il s'agissait également d'un inverse à gauche. Le théorème 3.10 nous assure que cette vérification était inutile.*
- *Pour obtenir l'inverse d'une matrice carrée de taille* $n$, *nous avons résolu un système à* $n^2$ *inconnues, ce qui devient vite très fastidieux lorsque* $n$ *augmente. En pratique, nous utiliserons l'****algorithme de Gauss****.*
  *On pourra se référer à la vidéo suivante : Recherche Inverse Matrice*

**Application 3.12.** *Les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *sont-elles inversibles et si oui quel est leur inverse ?*

**Application 3.13.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que* $A^2 - A - 2I_3 = 0$.
2. *En déduire que* $A$ *est inversible et donner la valeur de* $A^{-1}$.

## 3.3 Caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires

On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ d'inconnues le $p-$uplet $(x_1, ..., x_p)$ suivant : $\mathscr{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ . \\ . \\ a_{n,1}x_1 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$.

On note alors :

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$ la matrice associée au système $\mathscr{S}$ ;
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice égale au second membre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne dont chaque coefficient correspond à une des inconnues $x_1, ..., x_p$.

Alors :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix} = B$$

**Ainsi, résoudre le système $\mathscr{S}$ revient à trouver toutes matrices colonnes $\boldsymbol{X}$ qui vérifient $\boldsymbol{AX = B}$.**

Dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice colonne $X$ vérifiant $AX = B$ :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

**Théorème 3.14.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A$ est inversible*
2. *$\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ; l'équation $AX = B$ admet une unique solution ;*
3. *le rang du système ayant pour matrice $A$ est $n$.*

**Méthode 3.15.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $A'$ sa matrice échelonnée réduite équivalente.*
*$A$ est inversible ssi pour toute matrice colonne $B$, l'équation $AX = Y$ admet pour unique solution $X = A^{-1}Y$.*
*On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.*
*Pour déterminer l'inverse de $A$, on applique à la matrice augmentée $(A \mid Y)$ les opérations élémentaires qui transforment $A$ en $A'$.*
*On obtient une nouvelle matrice augmentée $(A' \mid Y')$.*
*Deux possibilités :*

- *Si $A' = I_n$ alors $A$ est inversible et $Y' = A^{-1}Y$ : on obtient alors $A^{-1}$ en lisant les coefficients du second membre.*
- *Sinon, $A$ n'est pas inversible.*

**Application 3.16.** *Déterminer si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Si oui, donner sa matrice inverse.*

**Proposition 3.17.** *$GL_n(\mathbb{K})$ est stable par produit : si $A$ et $B$ sont deux matrices inverses alors $AB$ l'est également.*
*De plus :*

$$\forall (A,B) \in (GL_n(\mathbb{K})^2, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Application 3.18.** *Soient* $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Expliciter la matrice $A = PDP^{-1}$.*
2. *En déduire que $A$ est inversible puis déterminer la matrice $A^{-1}$.*

# 4 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

**Proposition 4.1.** *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
*Alors l'application* $f : \begin{cases} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$ *est linéaire. C'est-à-dire qu'elle vérifie :*

$$\forall (X_1, X_2) \in (\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$$

*Elle est appelée l'**application linéaire canoniquement associée à la matrice** A.*

**Application 4.2.** *Soit* $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $f(X_1)$ *et* $f(X_2)$.
2. *En déduire* $f(3X_1 - 2X_2)$.

**Application 4.3.** *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Entre quels ensembles opère l'application* $f : X \mapsto AX$ *?*
2. *Quelle est l'image d'une colonne* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ *par* $f$ *?*

**Remarque 4.4.**

- *Un élément de* $\mathbb{K}^n$ *est un* $n-$*uplet d'éléments de* $\mathbb{K}$. *Par exemple* $(1, 3, 5) \in \mathbb{K}^n$.
- *On peut identifier les éléments de* $\mathbb{K}^n$ *à des matrices colonnes de taille* $n$.

  *Par exemple* $(1, 3, 5)$ *correspondra à la matrice colonne* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.
- *Cette correspondance est* ***bijective*** *: à chaque élément de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on associe un unique élément de* $\mathbb{K}^n$.

  *Par exemple à la matrice colonne* $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ *correspond* $(2, 5) \in \mathbb{K}^2$.

**Définition 4.5.** *Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- *Puisque* $f : \begin{cases} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$ *est linéaire, elle définit également une application linéaire* $\tilde{f} : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$*. On dit que l'application linéaire* $\tilde{f}$ *est* ***canoniquement associée*** *à la matrice* $A$*.*
- *Réciproquement, les applications linéaire de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *correspondent naturellement à une matrice de taille* $(n, p)$*.*

**Application 4.6.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$*. Donner l'expression analytique de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice* $A$*.*

**Application 4.7.** *Quelle est la matrice* $A$ *dont l'application linéaire canoniquement associée est l'application :*$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, x, 2x - 3y) \end{cases}$ *?*

**Définition 4.8.**
- *On appelle* ***noyau*** *de* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des antécédents de* $0_n$ *par* $f : X \mapsto AX$*, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de* $AX = 0_n$*.*
- *Le noyau de* $A$ *est noté* $Ker(A)$*, c'est un sous-ensemble de* $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *:*

$$Ker(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0_n\}$$

*Autrement dit,* $Ker(A)$ *est l'ensemble des colonnes correspond aux solutions du système homogène de matrice* $A$*.*

**Méthode 4.9.** *Pour déterminer* $Ker(A)$*, on doit résoudre le système homogène de matrice* $A$*. Pour cela, on peut appliquer l'algorithme de Gauss.*

**Application 4.10.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *,* $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *appartiennent-ils à* $Ker(A)$ *?*

**Application 4.11.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer* $Ker(A)$.

**Définition 4.12.** *On appelle image de* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des images de l'application* $f : X \mapsto AX$.
*L'image de* $A$ *est notée* $\boldsymbol{Im(A)}$, *c'est un sous-ensemble de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *:*

$$Im(A) = \{AX, X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

**Proposition 4.13.** *Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *de colonnes* $A_1, ..., A_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *alors :*

$$Im(A) = Vect(A_1, ..., A_p)$$