Intégration
Devoir-Maison 9

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\,\mathrm{d}t$

1. Calculer I_0.
2. (a) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto te^{t/2}$ en procédant par parties.

   (b) En déduire la valeur de I_1.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} = \sqrt{e} - I_n$.
4. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$0 \leqslant (1-t)^n e^{t/2} \leqslant 1.$$
   Indication : on pourra étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = (1-t)^n e^{t/2}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}n!}$.
   Indication : On rappelle que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$, et telles que
   $$\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t), \text{ alors } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

   (c) En déduire la limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.