Programme de khôlle 28

Semaine du 24 mai 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (5-10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. Soit $\mathbb{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$ où $f_1 = (2, -1)$ et $f_2 = (1, 3)$.
   (a) Justifiez que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$.
2. Soient $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, $\mathscr{B} = (1, 1 + \mathrm{X}, 1 + \mathrm{X}^2)$ et $\mathscr{B}' = (\mathrm{X}^2 - 1, \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X}, 1)$.
   (a) Justifiez que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   (b) Écrire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Soit E un R-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. On considère f l'application linéaire de E vers E telle que :*

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3, f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$$

1. *Quelle est la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$? Si $u \in E$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathscr{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$?*
2. *Calculer $f(e_1 + 2e_2)$.*
3. *Déterminer le noyau et l'image de f.*
4. *Ces sous-espaces vectoriels de E sont-ils supplémentaires ?*
5. *Quelle est la matrice de f^2 dans la base $\mathscr{B}$? En déduire $f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3)$.*

Exercice 2.2. *Posons $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (1, 3)$.*

1. *Montrer que $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(e_1) = 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_2$.*

2. *Quelle est la matrice B de f dans la base $\{e_1, e_2\}$?*
3. *Si $u \in \mathbb{R}^2$ a pour coordonnées (X_1, X_2) dans la base $\mathscr{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$?*
4. *Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 2.3. *On désigne par $\mathscr{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application u définie par :*

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ P \mapsto \mathrm{P} + (1 - \mathrm{X})\mathrm{P}' + 2\mathrm{P}'' \end{cases}$$

Pour la suite, on désigne par $\mathrm{P}_1 = 1 - \mathrm{X}, \mathrm{P}_2 = 1$ *et* $\mathrm{P}_3 = 1 + 2\mathrm{X} - \mathrm{X}^2$ *et on note* $\mathscr{B}' = \{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3\}$.

1. *Montrer que u est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. *Déterminer la matrice A de u dans $\mathscr{B}$.*
3. *Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de* $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
4. *Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$.*
5. *Déterminer une base du noyau et de l'image de u.*

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.40 : Applications linéaires

1 Généralités
1.1 Définitions
1.2 Opérations sur les applications linéaires
1.3 Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

2 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel
2.1 Projecteurs
2.2 Symétries

3 Applications linéaires en dimension finie
3.1 Applications linéaires et familles de vecteurs
3.2 Isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie
3.3 Théorème du rang et conséquences
3.4 Rang d'une application linéaire

Chap.41 : Représentation matricielle d'une application linéaire

1 Matrice associée à une application linéaire
2 Rang d'une matrice