Les suites
Devoir-Maison 8

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation
$$x^3 - 3x + 1 = 0$$
et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que :
$$0 \leq x_n < 1/2 \text{ pour tout } n \geq 0.$$
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Indications :

1. Pour la première question : attention on ne demande pas de calculer α.
2. Pour la deuxième partie de la troisième question, on pourra montrer par récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour la dernière question : il faut d'une part montrer que (x_n) converge et on note ℓ sa limite et d'autre part il faut montrer que $\ell = \alpha$.