

Programme de khôlle 15

Semaine du 20 janvier 2025

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou Python(15 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.

Rédiger en langage Python une fonction :

1. **prod_mat(A,B)** qui reçoit en argument deux matrices carrées de même taille et qui renvoie $\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^T \times B)$.
2. **prod_poly1(P,Q)** qui reçoit en argument deux polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et qui renvoie $\langle P | Q \rangle_1 = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
3. **prod_poly2(P,Q)** qui reçoit en argument deux polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et qui renvoie $\langle P | Q \rangle_2 = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$.

2 Pratique calculatoire

Pour chaque espace euclidien E muni d'un produit scalaire φ , appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille libre \mathcal{F} afin de produire une base orthonormée pour l'espace vectoriel engendré $\text{Vect}(\mathcal{F})$:

1. $E = \mathbb{R}^3$, φ le produit scalaire usuel, $\mathcal{F} = ((1, 0, -1), (1, -1, 0))$
2. $E = \mathbb{R}^4$, φ le produit scalaire usuel, $\mathcal{F} = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1))$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. 1. Pour tous vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de \mathbb{R}^3 , on pose :

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

Montrer que $\langle . | . \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

2. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$ on pose :

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ est convergente.

(b) Montrer que $\langle . | . \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 3.2. 1. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

(b) On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On considère \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique et F l'ensemble défini par :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y + z - t = 0 \right\}$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base \mathcal{B} .

(b) Grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base \mathcal{B} , construire une base orthonormée de F que l'on notera \mathcal{C} .

(c) Le vecteur $\vec{u} = (1, \frac{1}{2}, 2, 2)$ appartient-il à F ?

Si c'est le cas, donner ses coordonnées dans la base \mathcal{C} .

Exercice 3.3. On note $E = \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et T -périodiques $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (où $T > 0$).

1. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. Montrer que $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .

3. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (la pulsation associée à la période T). On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n : t \mapsto \cos(n\omega t), \quad s_n : t \mapsto \sin(n\omega t).$$

(a) Montrer que les familles $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont orthogonales pour le produit scalaire défini dans la question précédente.

- (b) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \dots, c_n, s_n, \dots)$ est orthogonale.
- (c) Calculer la norme des fonctions de la famille \mathcal{F} .

Chap.10 : Espaces préhilbertiens réels

1 Généralités sur les espaces préhilbertiens

- 1.1 Produit scalaire
- 1.2 Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n
- 1.3 Norme euclidienne
- 1.4 Distance euclidienne

2 Orthogonalité

- 2.1 Vecteurs orthogonaux
- 2.2 Vecteur orthogonal à un sous-espace vectoriel
- 2.3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux
- 2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel
- 2.5 Propriétés importantes

3 Bases orthonormales

- 3.1 La théorie
- 3.2 La pratique
- 3.3 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée
- 3.4 Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée