

DM1 - A rendre le 1er septembre 2025

Exercice 0.1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 0.2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E .
2. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Déterminer la matrice D .
3. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer P et calculer P^{-1} .
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 0.3. En utilisant un développement limité au voisinage de , déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ et étudier la position relative de la courbe et de sa tangente au voisinage de ce point :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

Exercice 0.4. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0, v_0 = 2$ et les relations

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1 \leq v_n$.
2. Étudier la suite $(w_n) = (v_n - u_n)$ et exprimer son terme général.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.