Interrogation 8 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ *On pourra utiliser une intégration par parties.*
   Par intégration par parties avec $u' = \sin x$. *et* $v = x$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx \\
&= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0 - 0 + 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ *On pourra utiliser le le changement de variable* $x = \tan t$.
   Comme x *varie de* $x = 0$ *à* $x = 1$ *alors* t *doit varier de*

$$t = \arctan 0 = 0 \text{ à } t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

   $t \mapsto tan(t)$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ *et* $dx = \left(1 + \tan^2 t\right) dt, t = \arctan x$ *et on sait aussi que* $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} \Big(1 + \tan^2 t\Big) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t) + 1) dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Exercice 0.2. *Établir pour chacune des fonctions* f *proposées ci-dessous un développement limité de* f *en* 0 *à l'ordre* n.

1. $f(x) = ln(1 + x^2)$ *avec* $n = 6$
   $f(x) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} + o\left(x^6\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o\left(x^6\right)$

2. $f(x) = e^{3x} sin(2x)$ *avec* $n = 4$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + o\left(x^4\right)\Big) \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4 + o\left(x^4\right)\right) \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^4\right)\right) \\
&= 2x + 6x^2 + \left(\frac{9}{2} \times 2 - \frac{4}{3}\right) x^3 + \left(3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{9}{2} \times 2\right) x^4 + o\left(x^4\right) \\
&= 2x + 6x^2 + \frac{23}{2}x^3 + 5x^4 + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$