Concours Blanc

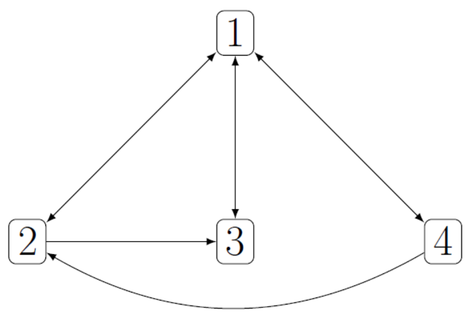
Durée : 4 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *Internet peut être modélisé par un graphe dont les sommets sont les pages internet (ou sites) et les arêtes les liens entre les pages.*
L'idée de l'algorithme du "PageRank" est de surfer au hasard sur Internet et de compter combien de fois on passe sur chaque page.
Une page p peut être considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p.
Dans ce problème, nous étudions deux exemples avec quatre pages puis trois pages.
La partie I traduit le premier exemple sous forme matricielle.
Dans les parties II et III, on s'intéresse à l'étude du second exemple.
La partie IV classe les trois pages du second exemple par ordre de popularité.

Partie I - Un premier exemple

Dans le schéma suivant, on considère un internet simplifié constitué de quatre pages internet. Par exemple, la page 1 possède un lien vers la page 2, un vers la page 3 et un vers la page 4 , etc. La page 3 ne possède qu'un seul lien vers la page 1 .



- *i et j sont des indices de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ et n est un entier naturel de $\mathbb{N}$.*
- *$p_n(j)$ est la probabilité que l'internaute soit sur la page j à l'instant $\tau = n$.*
- *On note $t_{i,j}$ la probabilité de se trouver à la page i à l'instant $\tau = n+1$ sachant qu'on était sur la page j à l'instant $\tau = n$. On fait l'hypothèse qu'il y a équiprobabilité entre les liens d'une page. Comme la page 1*

pointe sur trois autres pages, la probabilité $t_{3,1}$ *d'aller de la page 1 vers la page 3 est* $\frac{1}{3}$.

- *On fait également l'hypothèse qu'une page a une probabilité nulle de pointer sur elle-même, donc pour tout* i *de* $\{1,2,3,4\}, t_{i,i} = 0$
- *On note* $A_n(j)$ *l'événement « être sur la page* j *à l'instant* $\tau = n$ » *et on supposera que ces événements sont de probabilité non nulle.*
- *On note* T_4 *la matrice* $(t_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 4}$. *Cette matrice s'appelle matrice de transition dont le schéma présenté sur la figure 1 s'appelle* ***graphe****.*

1. *Compléter la matrice* T_4 *correspondante à l'exemple n°1 en remplaçant les* $t_{i,j}$ *par leurs valeurs*

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ \frac{1}{3} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ \frac{1}{3} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix}$$

2. *Pour* j *de* $\{1,2,3,4\}$, *calculer les sommes* $\sum_{i=1}^{4} t_{i,j}$. *Justifier soigneusement le résultat.*
3. *En précisant le théorème utilisé, montrer que :*

$$p_{n+1}(1) = t_{1,1}p_n(1) + t_{1,2}p_n(2) + t_{1,3}p_n(3) + t_{1,4}p_n(4)$$

4. *Donner sans justification l'expression de* $p_{n+1}(2), p_{n+1}(3)$ *et* $p_{n+1}(4)$ *en fonction des* $p_n(j)$.
5. *On note* U_n *le vecteur colonne :*

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix}$$

Montrer que pour n *de* $\mathbb{N}, U_{n+1} = T_4 U_n$.

6. *En déduire que pour tout* n *de* $\mathbb{N}, U_n = T_4^n U_0$.

Partie II - Étude d'un polynôme et de trois suites

On note $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $S(X) = 4X^3 - 3X - 1$.

7. *Vérifier que* $\lambda = 1$ *est une racine simple et* $\mu = -\frac{1}{2}$ *est une racine double de* S.

8. *Soit n un entier naturel. Justifier l'existence d'un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ et d'un polynôme $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n \ (1)$$

On ne cherchera pas à déterminer le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

9. *En remplaçant X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), en déduire deux équations vérifiées par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.*
10. *En dérivant l'égalité (1) puis en remplaçant X par μ, en déduire une troisième équation vérifiée par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.*
11. *Après résolution des équations précédemment obtenues, on admet que pour tout n de $\mathbb{N}$:*

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{9}\left(4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 6n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \beta_n = \frac{1}{9}\left(4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \gamma_n = \frac{1}{9}\left(1 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \end{cases}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ puis montrer que les trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qu'on déterminera.

Partie III - Un deuxième exemple

On considère dans cette partie la matrice :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

12. *En s'inspirant de l'exemple 1 de la partie I, dessiner le graphe dont la matrice de transition est la matrice T_3.*
13. *Montrer que le polynôme caractéristique de T_3 est égal à $\frac{1}{4}S$.*
14. *Déterminer les valeurs propres de T_3.*
15. *Pour chaque valeur propre, déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé.*
16. *En précisant le théorème utilisé, montrer que la matrice T_3 n'est pas diagonalisable.*

17. *Si $M(X) = m_0 + m_1X + \ldots + m_rX^r$ désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $M(T_3)$ la matrice telle que $M(T_3) = m_0.I_3 + m_1 \cdot T_3 + \ldots + m_r \cdot T_3^r$ avec :*

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer T_3^2 et T_3^3 puis montrer que $S(T_3) = O_3$ où O_3 désigne la matrice nulle carrée d'ordre 3.

18. *Comme dans la partie* **I**, *on pose pour tout n de $\mathbb{N}$:*

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \end{pmatrix}$$

Pour simplifier, on note :

$$U_0 = \begin{pmatrix} p_0(1) \\ p_0(2) \\ p_0(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Que vaut la somme $a + b + c$?

19. *On admet, comme dans la partie I, que pour tout n de $\mathbb{N}, U_n = T_3^n U_0$. On admet également qu'en remplaçant dans l'égalité (1) de la question Q8, la variable X par la matrice T_3, on obtient, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité matricielle :*

$$T_3^n = S(T_3)\, Q(T_3) + \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n I_3$$

En déduire que :

$$T_3^n = \alpha_n T_3^2 + \beta_n T_3 + \gamma_n I_3$$

20. *Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression du vecteur U_n en fonction du triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ et du triplet (a, b, c).*

21. *Montrer que les trois suites $(p_n(1))_{n\in\mathbb{N}}, (p_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n(3))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites qui seront déterminées.*
On note, pour $i \in \{1, 2, 3\}, p_\infty(i) = \lim_{n\to+\infty} p_n(i)$.
Quelle interprétation peut-on donner aux limites $p_\infty(1), p_\infty(2)$ et $p_\infty(3)$?

Partie IV - Popularité d'une page

Un moteur de recherche consiste à classer les pages par pertinence. Un des algorithmes possible repose sur l'hypothèse qu'une page p est considérée plus populaire que d'autres pages elles-mêmes populaires lorsque ces dernières ont un lien vers la page p.

22. *Parmi les 3 sites de l'exemple donné dans la partie II, quel(s) site(s) vous semble(nt) le(s) plus populaire(s) ? Vous devez justifier votre opinion.*

Dans la suite de cette partie, on reprend le deuxième exemple donné dans la partie III.
On mesure la popularité du site n°i *par le réel* $r(i)$ *de l'intervalle* $[0;1]$.
Le site i *est plus populaire que le site* i' *si* $r(i) \geqslant r(i')$. *Un site qui émet par exemple deux liens ne transmet que pour moitié sa popularité aux sites vers lesquels il point.*
On admet que le triplet $(r(1), r(2), r(3))$ *vérifie le système :*

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} r(1) = \frac{1}{2}r(2) + \frac{1}{2}r(3) \\ r(2) = \frac{1}{2}r(3) \\ r(3) = r(1) + \frac{1}{2}r(2) \end{array} \right.$$

23. *On pose* $R = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \end{pmatrix}$. *Réécrire le système (2) à l'aide de la matrice* T_3 *et du vecteur colonne* R.
    Lorsque R *n'est pas le vecteur nul, comment s'appelle* R *vis-à-vis de la matrice* T_3 *?*
24. *On pose* $\|R\|_1 = |r(1)| + |r(2)| + |r(3)|$. *Déterminer un vecteur* R *avec* $r(1) > 0$ *puis calculer* $\|R\|_1$.
25. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $R' = \frac{1}{\|R\|_1}R$.
    Justifier sans calcul que R' *est encore solution du système (2).*
26. *Déduire de* R' *l'ordre des sites du plus populaire au moins populaire.*

Exercice 0.2. *Dans cet exercice, on cherche à résoudre sur l'intervalle* $]0;+\infty[$, *l'équation différentielle*

$$(E): \quad xy'(x) - y(x) = \arctan x$$

1. *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à* (E).
2. *Soit* z *une fonction dérivable sur* $]0;+\infty[$.
   Montrer que la fonction y_P *définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

   $$y_P(x) = xz(x)$$

   est solution particulière de l'équation différentielle (E) *si et seulement si, pour tout* $x > 0, z'(x) = \frac{\arctan x}{x^2}$.

   Pour $x \in]0;+\infty[$, *on pose* $K(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}\, \mathrm{d}t$.
3. *Justifier que l'intégrale définissant* K *est convergente pour tout* $x \in]0;+\infty[$.
4. *Justifier que la fonction* K *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et calculer sa dérivée.*

5. *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :*

$$\forall x > 0, K(x) = \frac{\arctan x}{x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+t^2\right)}$$

6. *Déterminer trois réels α, β et γ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta t + \gamma}{1+t^2}$$

7. *En déduire une expression de K sans intégrale.*
8. *Conclure quant à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).*