Programme de khôlle 19

Semaine du 8 mars 2021

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (15 minutes)
2. Résolution d'un exercice à préparer
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

1. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

   (a) $a = 1$ et $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-1}$

   (b) $a = 0$ et $f(x) = \frac{sin(2x)}{sin(5x)}$

   (c) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{sin(3x)}{x}$

   (d) $a = 4$ et $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

   (e) $a = -1$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$

   (f) $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{2x} - 3x$

   (g) $a = 0$ et $f(x) = cos(\frac{1}{x})$

   (h) $a = +\infty$ et $f(x) = xsin(x)$

2. Donner un équivalent simple en a de la fonction f pour :

   (a) $a = 0$ et $f(x) = \frac{ln(1+4x)}{cos(3x)-1}$

   (b) $a = 0$ et $f(x) = ln(1 + sin(2x)$

   (c) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{ln(1+x^4)}{ln(x)}$

   (d) $a = \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = tan(x)$

   (e) $a = 1$ et $f(x) = \frac{ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

   (f) $a = 0$ et $f(x) = sin(x^2)ln(1 + x^2)$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2ln(x) \ si\ x > 0 \\ 0 \ si\ x = 0 \\ ax + b \ si\ x < 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f (on discutera selon les valeurs de a et b).

Exercice 2.2. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ *avec*

$$f : \begin{cases}]-2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{4x-1}{x+2} \end{cases}$$

.

1. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n - 1 > 0$.
2. *Démontrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*
3. *Démontrer que la suite* (u_n) *est convergente vers une limite* ℓ.
4. *Déterminer la valeur de* ℓ.

Exercice 2.3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et la fonction* $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f_n(x) = 1 - \tfrac{x}{2} - x^n.$$

1. *Montrer qu'il existe un unique* $x_n \in]0;1[$ *tel que* $f_n(x_n) = 0$.
2. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. *En déduire que* (x_n) *est monotone et qu'elle converge vers une limite* l.
4. *Supposons qu'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq M < 1$$

   (a) *Calculer la limite de* x_n^n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

   (b) *Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de* (x_n).

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.30 : Limites finie ou infinie d'une fonction

1 Formalisation de la notion de limite
1.1 Limite en un point ou en une borne finie
1.2 Limite à l'infini
1.3 Voisinage et caractère borné
1.4 Limite à droite, limite à gauche
1.5 Opérations sur les limites

2 Théorèmes d'existence d'une limite
2.1 Dans une inégalité
2.2 Théorème de la limite monotone

Chap.31 : Comparaison des fonctions

1 Domination et négligeabilité
1.1 Domination
1.2 Négligeabilité

2 Équivalence
2.1 Définition et opérations
2.2 Équivalents de référence
2.3 Équivalents et calcul de limites

Chap.35 : Continuité

1 Continuité en un point
Caractérisation séquentielle de la continuité.
Continuité à gauche, à droite
Prolongement par continuité

2 Continuité sur un intervalle
Application à la détermination de la limite des suites définies par récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

3 Théorèmes fondamentaux liés à la continuité
3.1 Théorème des valeurs intermédiaires
Principe de dichotomie.
3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue