Devoir Surveillé 4

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Exercice 0.1. *On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite* (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$.

On considère alors la fonction f *définie sur* $[1; +\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

On remarque ainsi que la suite (u_n) *vérifie* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x \in]-1; +\infty[$ *puis étudier son signe.*
   (b) *Déterminer la limite en* $+\infty$ *de* f.
   (c) *Dresser le tableau de variation complet de* f *sur* $[-1; +\infty[$.
   (d) *Justifier alors que :*
   $$\forall x \in [0; 1], 0 \leq f(x) \leq 1.$$
2. *Démontrer par récurrence que, pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 1]$.
3. *Démontrer que :*
   $$\forall x \in [0; 1], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$
4. (a) *En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que :*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, | u_{n+1} - 1 | \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} | u_n - 1 |$$
   (b) *En déduire que :*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, | u_n - 1 | \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n | u_0 - 1 |$$
   (c) (u_n) *converge-t-elle ? Si c'est le cas, déterminer sa limite.*

Exercice 0.2. *On considère la fonction* $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$. *On notera* $\mathscr{C}_f$ *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé* $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. (a) *Étudier la parité de* f.
   (b) *Dresser le tableau de variations complet de* f *sur* $\mathbb{R}$.
   (c) *Démontrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle* I *que l'on précisera.*
   (d) *Déterminer une équation de la tangente à* $\mathscr{C}_f$ *au point d'abscisse* 0.
   (e) *Dessiner l'allure de* $\mathscr{C}_f$.

2. (a) *Soit* $m \in \mathbb{R}$. *Combien l'équation* $(E_m) : f(x) = m$ *admet-elle de solutions réelles ? Justifier.*
   (b) *Soit* $m \in \mathbb{R}$, *montrer que* $m - \sqrt{m^2+1} < 0$.
   (c) *Soit* $m \in \mathbb{R}$, *résoudre l'équation* $X^2 - 2mX - 1 = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.
   (d) *Résoudre l'équation* (E_m) *en fonction de* m. *En déduire l'expression de la fonction réciproque de* $f : \mathbb{R} \to I$.
   (e) *Dessiner l'allure du graphe de* f^{-1}.

Exercice 0.3. 1. *On considère l'application* $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) *Démontrer que* f *est continue sur* $[-1;1]$.
   Indication : *on pourra utiliser l'expression conjuguée.*

   (b) *Démontrer que* f *est dérivable sur* $]-1;1[$.
   Remarque : *on ne demande pas de déterminer* $f'(x)$.
   (c) *Déterminer l'équation de la tangente en* 0 *à la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé.*

2. *Déterminer* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tan(\frac{x}{4})}-1}{ln(1+3x)}$.