

# Programme de khôlle 7

Semaine du 17 octobre 2022

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire (10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

## 1 Pratique calculatoire

En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\sum_{n \geq 2} u_n</math> avec <math>u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)</math></li> <li>2. <math>\sum e^{-2n+4}</math></li> <li>3. <math>\sum_{n \geq 2} v_n</math> avec <math>v_n = \frac{1}{n(n-1)}</math></li> <li>4. <math>\sum n(n+1)</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>\sum_{n \geq 2} w_n</math> avec :<br/> <math display="block">w_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}</math> </li> <li>6. <math>\sum 2^{n+1}(-3)^{2-n}</math></li> <li>7. <math>\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)</math></li> </ol> |
|--|---|

## 2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

**Exercice 2.1.** Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on note

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

1. Montrer que la série définissant  $S(a)$  est convergente.
2. Encadrer  $S(a)$  avec des intégrales pour tout  $a > 0$ .
3. En déduire la limite de  $S(a)$  lorsque  $a \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 2.2.** Montrer que l'application suivante est un endomorphisme et calculer son déterminant :

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \text{ définie par } \varphi(P) = Q,$$

où  $Q$  est le polynôme tel que  $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$

**Exercice 2.3.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Étudier la convergence des séries :

1.  $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ ,
2.  $\sum \frac{n!}{n^{an}}$ .

#### **Chap.4 : Déterminants**

- 1 Déterminant d'une matrice carrée
- 2 Calcul de déterminant
- 3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

#### **Chap.5 : Séries numériques**

- 1 Généralités sur les séries 1.1 Définitions
- 1.2 Séries télescopiques
- 1.3 Propriétés
- 1.4 Convergence absolue
  
- 2 Séries de référence
- 2.1 Série géométrique
- 2.2 Séries de Riemann
  
- 3 Règles de convergence sur les séries à termes positifs
- 3.1 Majoration des sommes partielles
- 3.2 Critère de comparaison
- 3.3 Critère des équivalents
- 3.4 Règle de D'Alembert
- 3.5 Une comparaison série-intégrale
- 3.6 Critère spécial des séries alternées
  
- 4 Développement décimal d'un nombre réel

#### **Chap.6 : Réduction des endomorphismes et des matrices**

- 1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice
- 1.1 Valeurs propres, vecteurs propres
- 1.2 Sous-espaces propres
- 1.3 Polynôme caractéristique
- 1.4 Ordre de multiplicité d'une valeur propre
  
- 2 Les propriétés utiles des éléments propres
- 2.1 Autour des valeurs propres
- 2.2 Autour des vecteurs propres
- 2.3 Autour des sous-espaces propres