Interrogation 1 - CORRECTION

Exercice 0.1. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ *(intégration par parties).*
   Les différentes fonctions étant de classe $\mathscr{C}^1$ *sur* $[0; \frac{\pi}{2}]$*, par intégration par parties avec* $u = x, v' = \sin x$ *:*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx &= [uv]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v \\ &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - 0 + 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$ *(changement de variable* $u = e^x$*).*
   Posons le changement de variable $u = e^x$ *avec* $x = \ln u$ *et* $du = e^x dx$*. La variable* x *varie de* $x = 0$ *à* $x = 1$*, donc la variable* $u = e^x$ *varie de* $u = 1$ *à* $u = e$*.*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= [2\sqrt{u+1}]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ *(changement de variable* $x = \tan t$ *).*
   Indication : $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

   Posons le changement de variable $x = \tan t$*, alors on a* $dx = \left(1 + \tan^2 t\right) dt, t = \arctan x$ *et on sait aussi que* $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.
   Comme x *varie de* $x = 0$ *à* $x = 1$ *alors* t *doit varier de* $t = \arctan 0 = 0$

à $t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}\left(1+\tan^2 t\right)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\tan^2 t} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2t)+1)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Exercice 0.2. *Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?*

1. $\int_0^1 \ln t dt$

2. $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,1]$, le problème de convergence est en 0 .
   Pour le traiter, on peut remarquer qu'on connait une primitive de ln, à savoir $x \mapsto x\ln x - x$. On a donc
   $$\int_X^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_X^1 = -X\ln X + X - 1$$
   qui tend vers -1 si X tend vers 0 .
   L'intégrale impropre est donc convergente, sa somme vaut -1.
2. $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
   Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
   Il s'agit d'une intégrale faussement impropre.

Exercice 0.3. *École : ECAM Rennes*

1. Dossier ou Concours : Concours

2. Type de concours : CCINP

3. Nombre de places en TSI :15

4. Frais d'inscription (boursier et non boursier) : 40 euros / 10 euros

5. Frais de scolarité sur trois ans (non boursiers) : 23 400 euros

6. Spécialités enseignées : Généraliste

7. Rang moyen d'admission : 52

Remarque : Suite aux épreuves écrites, les candidats admissibles sont convoqués à un entretien de motivation à l'ECAM Rennes de mi-juin à mi-juillet. L'entretien de motivation permet d'apprécier les qualités d'expression orale, la motivation et le projet professionnel du candidat. Le jury est composé d'un collaborateur de l'école et d'un professionnel exerçant dans l'industrie (partenaire ou Alumni).