Exercices
Chap.34 : Intégration

1 Calcul d'intégrales

Exercice 1.1. *On se propose de calculer* $I = \int_0^{\pi} cos^3(x)\,\mathrm{d}x$.

1. *A l'aide des formules d'Euler, linéariser* $cos^3(x)$.
2. *En déduire la valeur de* I.

Exercice 1.2. *Déterminer la valeur de l'intégrale* $I = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{arcsin(x^3)e^{-x^2}}{1+tan^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1.3.
1. *Calculer* $I_1 = \int_{-5}^{5} \mid x^2 - 5x + 6 \mid \,\mathrm{d}x$.
2. *Calculer* $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mid sin(x) \mid \,\mathrm{d}x$.

Exercice 1.4. *On considère les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *et* $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

1. *Calculer* $J = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. *Soit* $K = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) *Calculer* $J + K$
   (b) *En déduire la valeur de* K.

Exercice 1.5. *Sans effectuer de calcul, déterminer la valeur de* $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

2 Intégrations par partie

Exercice 2.1. *Calculer :*

1. $I_1 = \int_0^1 arctan(x)\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \int_1^e ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \int_1^e x^2 ln(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2.2. *On se propose de calculer* $I = \int_0^1 xarctan(x)\,\mathrm{d}x$.

1. *A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que* $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. *Calculer* $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *et en déduire la valeur de* I.

Exercice 2.3. *On définit la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par :*

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. *Calculer* I_1.
2. *En intégrant par partie* I_1, *calculer* I_2.
3. *Calculer* I_3 *en s'inspirant de la question précédente.*

3 Changements de variables

Exercice 3.1. *Calculer à l'aide du changement de variable proposé :*

1. $I_1 = \int_1^2 (ln(x))^2 \,\mathrm{d}x$ *en posant* $t = ln(x)$.
2. $I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \,\mathrm{d}x$ *en posant* $t = e^x$.
3. $I_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} \,\mathrm{d}x$ *en posant* $t = \sqrt{1+x}$
4. $I_4 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$ *en posant* $x = sin(t)$

4 Suites et intégrales

Exercice 4.1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$.

1. *Calculer* u_0.
2. *Démontrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
3. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*
4. (a) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *calculer* $u_n + u_{n+2}$.

   (b) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   Déterminer $\lim S_n$.

Exercice 4.2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{array} \right.$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \int_0^{ln(\sqrt{3})} (f(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. (a) *Calculer* $f'(x)$ *puis en étudier le signe.*

   (b) *Déterminer les limites de* f *en* $+\infty$ *et* $-\infty$.

   (c) *Dresser le tableau de variation complet de* f.
2. (a) *Justifier que, pour tout* $x \in \left[0; ln(\sqrt{3})\right], 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

   (b) *En déduire que, pour tout* $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq (\frac{1}{2})^n ln(\sqrt{3})$.

   (c) *En déduite* $\lim I_n$.
3. *Calculer* I_0 *et* I_1.
   Indication : *on pourra remarquer que* $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \frac{x-1}{x+1} = -1 + \frac{2x}{x+1}$.
4. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 + f'(x) = 1$.
5. *Calculer alors* $I_{n-2} - I_n$ *pour tout* $n \geq 2$.
6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

   (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.

   (b) *En déduire* $\lim S_n$.