Devoir Surveillé 2 - CORRECTION

Durée : 3 heures

Calculatrice interdite

Exercice 1

On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Exprimer $\sigma(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$ (les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ pourront être notés en colonne).
2. Calculer A^2. Que peut-on en déduire concernant σ ?
3. Déterminer les éléments caractéristiques de σ (en donner des bases).

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(g_1) \quad \text{où} \quad g_1 = (1,2,0,-1).$$

On appelle s la symétrie vectorielle par rapport à G parallèlement à H.

4. Déterminer une base $\mathscr{B} = (h_1, \ldots, h_p)$ de H. Que vaut p ?
5. Démontrer que la famille $\mathscr{E} = (h_1, \ldots, h_p, g_1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Qu'en déduire concernant H et G ?
6. Donner $B' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(s)$. En déduire la matrice B de s relativement à la base canonique ε.
7. Montrer que $s + \sigma = 0$.

CORRECTION

On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Exprimer $\sigma(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$ (les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ pourront être notés en colonne).

   Corrigé. Par définition, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, on a :

   $$\boxed{\sigma(X) = AX = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 3t \\ -2x + y + 6t \\ 3z \\ x + y \end{pmatrix}}.$$

2. Calculer A^2. Que peut-on en déduire concernant σ ?

   Corrigé. On trouve $\boxed{A^2 = I_4}$ (calculs à écrire sur une copie...). Comme A^2 est la matrice de σ^2 dans la base canonique, on en déduit que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ donc $\boxed{\sigma \text{ est une symétrie vectorielle.}}$

3. Déterminer les éléments caractéristiques de σ (en donner des bases).

   Corrigé. σ est la symétrie par rapport à $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid \sigma(u) = u\}$ parallèlement à $F_2 = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid \sigma(u) = -u\}$. Déterminons F_1 et F_2. Si $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$u \in F_1 \iff \sigma(u) = u \iff \begin{cases} 2x - y + 3t = 3x \\ -2x + y + 6t = 3y \\ 3z = 3z \\ x + y = 3t \end{cases} \quad \text{(multiplication par 3)}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 3t = 0 \\ 2x + 2y - 6t = 0 & \text{(redondante)} \\ x + y - 3t = 0 & \text{(redondante)} \end{cases}$$

$$\iff x + y - 3t = 0 \quad \text{(cela fournit une équation cartésienne de } F_1\text{)}$$

$$\iff x = -y + 3t$$

$$\iff (x,y,z,t) = (-y + 3t, y, z, t) = y\underbrace{(-1,1,0,0)}_{=f_1} + z\underbrace{(0,0,1,0)}_{=f_2} + t\underbrace{(3,0,0,1)}_{=f_3}$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3),$$

donc $F_1 = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Vérifions que (f_1, f_2, f_3) est libre. Soient a, b, c des réels :

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0 \iff \begin{cases} -a + 3c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0,$$

donc finalement $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } F_1.}$ Terminons avec F_2 :

$$u \in F_2 \iff \sigma(u) = -u \iff \begin{cases} 2x - y + 3t = -3x \\ -2x + y + 6t = -3y \\ 3z = -3z \\ x + y = -3t \end{cases} \text{(multiplication par 3)} \iff \begin{cases} 5x - y + 3t = 0 \\ 2x - 4y - 6t = 0 \\ z = 0 \\ x + y + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x + y + 3t = 0 \\ 5x - y + 3t = 0 \\ x - 2y - 3t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x + y + 3t = 0 \\ 6y + 12t = 0 & (L_3 \leftarrow 5L_2 - L_3) \\ 3y + 6t = 0 & (L_4 \leftarrow L_2 - L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ x + y + 3t = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -2t \\ x = -y - 3t = -t \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z, t) = t(-1, -2, 0, 1),$$

donc $F_2 = \mathrm{Vect}(f_4)$ en posant $f_4 = (1, 2, 0, -1) \neq 0$, donc $\boxed{(f_4) \text{ est une base de } F_2.}$

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 3t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(g_1) \quad \text{où} \quad g_1 = (1, 2, 0, -1).$$

On appelle s la symétrie vectorielle par rapport à G parallèlement à H.

4. Déterminer une base $\mathscr{B} = (h_1, \ldots, h_p)$ de H. Que vaut p ?

   Corrigé. Par définition de H, on reconnaît le sous-espace vectoriel F_1 calculé à la question précédente (hyperplan d'équation cartésienne $x + y - 3t = 0$). Par conséquent, $\boxed{(h_1, h_2, h_3) = (f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } H \text{ et } p = 3 \text{ (sa dimension).}}$

5. Démontrer que la famille $\mathscr{E} = (h_1, \ldots, h_p, g_1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Qu'en déduire concernant H et G ?

   Corrigé. La famille $\mathscr{E} = (h_1, h_2, h_3, g_1)$ possédant 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, il suffit de montrer qu'elle est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^4$. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{R}$:

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 + dg_1 = 0 \iff \begin{cases} -a + 3c + d = 0 \\ a + 2d = 0 \\ b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + 3c + d = 0 \\ 3c + 3d = 0 & (L_2 \leftarrow L_1 + L_2) \\ b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + 3c + d = 0 \\ b = 0 \\ c + d = 0 \\ c - d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + 3c + d = 0 \\ b = 0 \\ c + d = 0 \\ 2d = 0 & (L_4 \leftarrow L_3 - L_4) \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = d = 0,$$

donc $\boxed{\mathscr{E} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$ Sachant que (h_1, h_2, h_3) est une base de H et (g_1) une base de G (car $g_1 \neq 0$), le critère des bases adaptées permet d'affirmer que $\boxed{H \oplus G = \mathbb{R}^4.}$

6. Donner $B' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(s)$. En déduire la matrice B de s relativement à la base canonique ε.

Corrigé. Comme s est la symétrie par rapport à G parallèlement à H, $s(h_1) = -h_1$, $s(h_2) = -h_2$, $s(h_3) = -h_3$ et $s(g_1) = g_1$, donc :

$$\boxed{B' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(s) = \begin{array}{c} \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ g_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s(h_1) & s(h_2) & s(h_3) & s(g_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.}$$

Appliquons la formule de changement de base pour les endomorphismes :

$$B = \mathrm{Mat}_{\varepsilon}(s) = P_{\varepsilon\to\mathscr{E}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(s)P_{\mathscr{E}\to\varepsilon} = PB'P^{-1}$$

en posant $P = P_{\varepsilon\to\mathscr{E}}$. Par définition des vecteurs de $\mathscr{E}$, on obtient directement :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il nous reste à inverser P, par exemple en résolvant le système linéaire $PX = X'$ où l'on écrit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$.

Après résolution (le faire sur une copie), on obtient :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{puis après deux produits matriciels,} \quad \boxed{B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

7. Montrer que $s + \sigma = 0$.

Corrigé. On remarque que $A + B = 0$, *i.e.* $\mathrm{Mat}_{\varepsilon}(\sigma + s) = 0$ donc $\boxed{\sigma + s = 0.}$

N.B. *Remarque.* C'est en fait normal : σ est la symétrie par rapport à $F_1 = H$ parallèlement à $F_2 = G$, tandis que s est la symétrie par rapport à G parallèlement à H, donc $s = -\sigma$.

Exercice 2 On définit l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y, x + y + 2z)$.
On notera $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On rappelle au candidat que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pourront être indifféremment notés en ligne ou en colonne.
Les **Parties B** et **C** peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre, mais elles utilisent toutes les deux les résultats de la **Partie A**.

Partie A. *Premières propriétés de f.*

A1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

A2. (a) Citer le théorème du rang dans un cadre général.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ puis en déduire $\mathrm{rg}\, f$. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

A3. Donner la matrice M de f relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ en justifiant brièvement. Quel est son rang ? Est-elle inversible ?

On définit les ensembles $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $G = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 3u\}$.

A4. Réécrire F et G comme des noyaux d'applications linéaires convenables. Que peut-on en déduire sur la structure de F et G ?

A5. (a) Trouver une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F puis donner sa dimension.
   (b) Trouver une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de G puis donner sa dimension.

A6. On note $\mathscr{E}$ la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Justifier que $\mathscr{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

A7. Donner la matrice M' de f relativement à la base $\mathscr{E}$.

A8. Quelle égalité matricielle relie les matrices M et M' ? *Justifier soigneusement.*

Partie B. *Un projecteur et une symétrie.*

B1. Énoncer trois caractérisations différentes permettant de montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

B2. Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On note q la projection sur G parallèlement à F et σ la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

B3. Déterminer l'expression de $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

B4. Même question pour $\sigma(x, y, z)$.

Partie C. *Calcul des puissances de M.*

C1. Trouver deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$.

C2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$ où les suites (α_n) et (β_n) vérifient les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -3\alpha_n. \end{cases}$$

Que valent α_i et β_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$?

C3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_{n+2} - 4\alpha_{n+1} + 3\alpha_n = 0$.

C4. Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \alpha_n = \tfrac{1}{2}(3^n - 1)$$

et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = -3\alpha_{n-1} = \tfrac{3}{2}(1 - 3^{n-1}).$$

C5. Conclure en explicitant M^n. *On attend une matrice 3×3 dont les coefficients dépendront de n.*

CORRECTION

Partie A. *Premières propriétés de f.*

A1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ puis $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda x+\lambda' x' \\ \lambda y+\lambda' y' \\ \lambda z+\lambda' z' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad \text{où } \begin{cases} X = \lambda x + \lambda' x' \\ Y = \lambda y + \lambda' y' \\ Z = \lambda z + \lambda' z' \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} 2X+Y+Z \\ Y \\ X+Y+2Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x+\lambda' x')+\lambda y+\lambda' y'+\lambda z+\lambda' z' \\ \lambda y+\lambda' y' \\ \lambda x+\lambda' x'+\lambda y+\lambda' y'+2(\lambda z+\lambda' z') \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y \\ x+y+2z \end{pmatrix} + \lambda'\begin{pmatrix} 2x'+y'+z' \\ y' \\ x'+y'+2z' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda' f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même : $\boxed{\text{c'est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

A2. (a) Citer le théorème du rang dans un cadre général.

Corrigé.

Théorème du rang. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.

(b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ puis en déduire $\operatorname{rg} f$. L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Corrigé. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z)\in\operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z)=(0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+\ \ z&=&0\\ y\qquad&=&0\\ x+y+2z&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+\ \ z&=&0\\ y\qquad&=&0\\ y+3z&=&0\end{array}\right. \qquad (L_3\leftarrow 2L_3-L_1)$$

$$\iff \begin{cases} y=0\\ z=-\frac{1}{3}y=0\\ x=-\frac{1}{2}(y+z)=0\end{cases}$$

$$\iff (x,y,z)=(0,0,0).$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker} f=\{(0,0,0)\}.}$ D'après le théorème du rang (on est en dimension finie), on en déduit que $\boxed{\operatorname{rg} f} = \dim\mathbb{R}^3-\dim\operatorname{Ker} f = 3-0 \boxed{=3.}$ Comme f est un endomorphisme de rang 3 et que $\dim\mathbb{R}^3=3$, c'est donc un $\boxed{\text{automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

N.B. *Remarque.* On pouvait aussi dire que f est injective (car linéaire dont le noyau est nul) ; or les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension finie donc f est bijective : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donc $\operatorname{rg} f=3$.

A3. Donner la matrice M de f relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ en justifiant brièvement. Quel est son rang ? Est-elle inversible ?

Corrigé. On a :

$$\begin{aligned} f(b_1)&=f(1,0,0)=(2,0,1)=2b_1+b_3\\ f(b_2)&=f(0,1,0)=(1,1,1)=b_1+b_2+b_3\\ f(b_3)&=f(0,0,1)=(1,0,2)=b_1+2b_3.\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\boxed{M=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}.}$$

On sait que f est bijective, donc sa matrice dans n'importe quelle base est inversible : $\boxed{M \text{ est inversible.}}$ De plus, comme f est de rang 3, sa matrice dans n'importe quelle base est également de rang 3 : $\boxed{\operatorname{rg} M=3.}$

N.B. *Remarques.*

- ⇝ Ceci provient du fait que, toujours en identifiant les vecteurs ligne et les vecteurs colonne, l'application f et sa matrice M (dans la base $\mathscr{B}$) ont même image (voir remarque suivant la Définition 50 du cours).
- ⇝ Il était donc inutile de recalculer $\operatorname{rg} M$ en échelonnant la matrice...

On définit les ensembles $F=\{u\in\mathbb{R}^3 \mid f(u)=u\}$ et $G=\{u\in\mathbb{R}^3 \mid f(u)=3u\}$.

A4. Réécrire F et G comme des noyaux d'applications linéaires convenables. Que peut-on en déduire sur la structure de F et G ?

Corrigé. On a :

$\boxed{F}=\{u\in\mathbb{R}^3 \mid f(u)-u=0\}=\{u\in\mathbb{R}^3 \mid (f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})(u)=0\} \boxed{=\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})}$ et de même $\boxed{G=\operatorname{Ker}(f-3\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}).}$

Comme F et G sont des noyaux d'applications linéaires, on en déduit que ce sont $\boxed{\text{des sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^3.}$

A5. (a) Trouver une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F puis donner sa dimension.

Corrigé. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$u\in F \iff f(x,y,z)=(x,y,z) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+\ \ z&=&x\\ y\qquad&=&y\\ x+y+2z&=&z\end{array}\right. \qquad \text{(toujours vraie)}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{array}\right. \qquad \text{(redondante)}$$

$$\iff x+y+z=0$$

$$\begin{aligned} &\iff z = -x - y \\ &\iff (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1). \end{aligned}$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ en posant $\boxed{e_1 = (1,0,-1)}$ et $\boxed{e_2 = (0,1,-1).}$ Ces deux vecteurs étant non-colinéaires (car non nuls et la première coordonnée de l'un est nulle mais pas l'autre), ils forment une famille libre, donc $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base}}$ $\boxed{\text{de } F \text{ et } \dim F = 2.}$

N.B. *Remarque.* Soit dit en passant, F est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

(b) Trouver une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de G puis donner sa dimension.

Corrigé. Procédons de façon similaire ; soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u \in G \iff f(x,y,z) = 3(x,y,z) \iff \begin{cases} 2x + y + z = 3x \\ \phantom{2x+{}} y \phantom{{}+2z} = 3y \\ x + y + 2z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \phantom{-x+{}} 2y \phantom{{}+z} = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - z = 0 \quad \text{(redondante)} \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z) = z(1,0,1).$$

Ainsi, $G = \mathrm{Vect}(e_3)$ en posant $\boxed{e_3 = (1,0,1).}$ Comme $e_3 \neq 0$, il forme une famille libre, donc $\boxed{(e_3) \text{ est une base de } G}$ et $\boxed{\dim G = 1.}$

N.B. *Remarque.* Soit dit en passant, G est la droite vectorielle dirigée par e_3.

A6. On note $\mathscr{E}$ la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Justifier que $\mathscr{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. La famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ possède 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, dont il suffit de montrer qu'elle est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{R}^3$. Comme on a 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser le déterminant (sinon, résoudre le système provenant de $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0\dots$). La base canonique de $\mathbb{R}^3$ étant orthonormée directe, on a :

$$\mathrm{Det}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{dvlpt } /L_2}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

donc $\mathscr{E}$ est libre, c'est finalement $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}^3.}$

A7. Donner la matrice M' de f relativement à la base $\mathscr{E}$.

Corrigé. Par définition de F, on a $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$ car $e_1, e_2 \in F$. De même, par définition de G, on a $f(e_3) = 3e_3$ car $e_3 \in G$. On en déduit la matrice M' :

$$\boxed{M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

A8. Quelle égalité matricielle relie les matrices M et M' ? *Justifier soigneusement.*

Corrigé. On sait que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$. Donc, en posant $\boxed{P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{E}}}$ (matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{E}$), la formule de changement de base pour les endomorphismes montre que $\boxed{M' = P^{-1}MP.}$

Partie B. *Un projecteur et une symétrie.*

B1. Énoncer trois caractérisations différentes permettant de montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Corrigé. Étant en dimension finie, on peut utiliser les trois caractérisations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} F \oplus G = \mathbb{R}^3 &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3 \\ F + G = \mathbb{R}^3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3 \\ F \cap G = \{(0,0,0)\} \end{cases} \\ &\iff (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ (car } (e_1,e_2) \text{ est une base de } F \text{ et } (e_3) \\ &\phantom{\iff{}} \text{une base de } G \text{ : critère sur les bases adaptées).} \end{aligned}}$$

B2. Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. D'après la dernière caractérisation énoncée ci-dessus, on peut affirmer que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$ car on a démontré en (A6) que $\mathscr{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note q la projection sur G parallèlement à F et σ la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

B3. Déterminer l'expression de $q(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Corrigé. Rappelons que si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$. Dans ce cas, le projeté $q(u)$ du vecteur u sur G parallèlement à F est donné par $q(u) = g$. Il s'agit donc de déterminer la composante g en fonction de (x, y, z).

Rappelons que $G = \mathrm{Vect}(e_3)$. Donc, si $g \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda e_3 = (\lambda, 0, \lambda)$. Posons $f = u - g = (x - \lambda, y, z - \lambda) = (X, Y, Z)$. Étant donné que F est le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f \in F &\iff X + Y + Z = 0 \\ &\iff x - \lambda + y + z - \lambda = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{x + y + z}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $g = \left(\frac{x+y+z}{2}, 0, \frac{x+y+z}{2}\right)$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q(x, y, z) = \left(\tfrac{x+y+z}{2}, 0, \tfrac{x+y+z}{2}\right).}$$

B4. Même question pour $\sigma(x, y, z)$.

Corrigé. Comme σ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F, on sait qu'on a la relation $\sigma = 2q - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, d'où :

$$\boxed{\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \sigma(x, y, z) = 2q(x, y, z) - (x, y, z) = (y + z, -y, x + y).}$$

N.B. *Remarque.* Avec les notations de la question précédente, on pouvait aussi directement dire que $\sigma(x, y, z) = \sigma(u) = g - f$ puis on retrouve exactement la même expression.

Partie C. *Calcul des puissances de M.*

C1. Trouver deux réels a et b tels que $M^2 = aM + bI_3$.

Corrigé. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 4M - 3I_3,$$

donc $\boxed{a = 4 \text{ et } b = -3.}$

C2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$ où les suites (α_n) et (β_n) vérifient les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} = -3\alpha_n. \end{cases}$$

Que valent α_i et β_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$?

Corrigé. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pose (P_n) : « il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$ ».

Initialisation. On a $M^0 = I_3 = 0 \cdot M + 1 \cdot I_3$ donc (P_0) est vraie en posant $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$.

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose (P_n) vraie ; démontrons (P_{n+1}) :

$$\begin{aligned} M^{n+1} = MM^n &= M(\alpha_n M + \beta_n I_3) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \alpha_n M^2 + \beta_n M \\ &= \alpha_n(4M - 3I_3) + \beta_n M && \text{(question précédente)} \\ &= (4\alpha_n + \beta_n)M - 3\alpha_n I_3 \\ &= \alpha_{n+1} M + \beta_{n+1} I_3, \end{aligned}$$

en posant $\boxed{\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + \beta_n}$ et $\boxed{\beta_{n+1} = -3\alpha_n.}$ Ceci démontre la propriété (P_{n+1}).

Conclusion. Par récurrence, la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\,(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, \quad M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3.}$$

Les suites (α_n) et (β_n) vérifient bien les relations de récurrence données, par définition même au sein de l'hérédité. Terminons par les premières valeurs de α_i et β_i :

$$\boxed{(\alpha_0, \beta_0) = (0, 1)} \qquad \text{car } M^0 = 0 \cdot M + 1 \cdot I_3$$
$$\boxed{(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)} \qquad \text{car } M^1 = 1 \cdot M + 0 \cdot I_3$$
$$\boxed{(\alpha_2, \beta_2) = (4, -3)} \qquad \text{car } M^2 = 4M - 3I_3.$$

C3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} - 4\alpha_{n+1} + 3\alpha_n = 0$.

Corrigé. Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce aux relations de récurrence satisfaites par les suites (α_n) et (β_n), on a :

$$\alpha_{n+2} = 4\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 4\alpha_{n+1} - 3\alpha_n,$$

d'où $\boxed{\alpha_{n+2} - 4\alpha_{n+1} + 3\alpha_n = 0.}$

C4. En déduire les expressions de α_n et β_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé. On peut raisonner par récurrence double :

(a) on vérifie les deux égalités aux rang 0 et 1

(b) on suppose les égalités vraies aux rang n et $n+1$, on démontre qu'elles sont alors vraies au rang $n+2$.

(c) on conclut : les égalités sont vraies aux rang 0 et 1, si elles sont vraies aux rangs n et $n+1$ alors elles sont vraies au rang $n+2$.
Donc, par récurrence double, les deux égalités sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C5. Conclure en explicitant M^n. *On attend une matrice* 3×3 *dont les coefficients dépendront de* n.

Corrigé. Grâce à ce qui précède, on a donc :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M^n &= \alpha_n M + \beta_n I_n \\
&= \frac{1}{2}(3^n - 1)M + \frac{3}{2}(1 - 3^{n-1})I_3 \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2 & 3^n - 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n - 1 & 0 \\ 3^n - 1 & 3^n - 1 & 2 \cdot 3^n - 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 3^n \end{pmatrix} \\
&\boxed{= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3^n - 1 & 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$