Programme de khôlle 4

Semaine du 30 septembre 2024

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire et/ou code Python(10 minutes).
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Python

Les documentions CCS et CCINP sont autorisées.
Rédiger en langage Python une fonction :

1. ***Integrale(n)*** qui reçoit en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de $\int_0^1 ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
2. ***Riemann(n)*** qui reçoit en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$.
3. ***Aleatoire(n)***qui reçoit en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie une matrice carrée de taille n dont les coefficients diagonaux sont des entiers aléatoires compris entre 2 et 20.

2 Pratique calculatoire

1. Calculer en utilisant une intégration par partie :
   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \ \mathrm{d}t$
   (b) $\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \ \mathrm{d}t$
   (c) $\int_0^1 t\arctan t \ \mathrm{d}t$
2. Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.
   (a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \ \mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$.
   (b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} \ \mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$.
   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos t \ \mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$.

3 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 3.1. *On pose, pour tout* $(x;y) \in \mathbb{K}^2, p(x;y) = \frac{1}{5}(x+2y;2x+4y)$.

1. *Montrer que* p *est un endomorphisme.*
2. *Déterminer une base de* $G = \ker(p)$ *et une base de* $F = \mathrm{Im}(p)$.
3. *Montrer que* $p \circ p = p$. *Qu'en conclure ?*
4. *Exprimer la symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G.

Exercice 3.2. *On pose* $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\right\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}((-1,2,1))$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires.*
2. *Déterminer l'expression de la projection sur* F *parallèlement à* G.
3. *Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à* G *parallèlement à* F.

Exercice 3.3. *Soit* $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *représentée dans la base canonique* $\mathscr{B}$ *par :*

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Soit* $\mathscr{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *avec* $e_1 = (1,-1,1), e_2 = (1,1,-1), e_3 = (-1,-1,-1)$.
   (a) *Montrer que* $\mathscr{C}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Expliciter les trois vecteurs de la base canonique comme combinaisons linéaires des vecteurs de* $\mathscr{C}$.
2. *Déterminer la matrice* T *de* f *dans cette nouvelle base.*
3. *Calculer* T^n.
4. *En déduire la matrice de* f^n *dans la base canonique.*

4 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.2 : Applications linéaires

1 Définitions
2 Noyau et image
3 Représentation matricielle
4 Sous-espaces stables par un endomorphisme
5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel
5.1 Projecteurs
5.2 Symétries.

Chap.3 : Intégrales : rappels et généralisation