Devoir Surveillé 4

Durée : 4 heures
Calculatrice interdite

Exercice 0.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice :*

$$\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a^2 & -\left(4a+a^2\right) & -(2a+2) \end{pmatrix}.$$

Quelques propriétés de la matrice M_a

1. *Pour quelles valeurs du paramètre a, la matrice M_a est-elle inversible ?*
2. *Déterminer le rang de M_a lorsque M_a n'est pas inversible.*

Éléments propres de M_a

3. *Montrer que $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a associé à la valeur propre λ que l'on précisera. Déterminer sous-espace propre E_λ associé à la valeur propre λ.*
4. *Calculer le polynôme caractéristique de M_a.*
5. *Montrer que $-a$ est une valeur propre multiple de M_a.*
6. *Montrer que M_a n'est pas diagonalisable. On distinguera les cas $a = 2$ et $a \neq 2$.*

Étude d'un cas particulier

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $\varepsilon_1 = (1, -2, 4)$.

7. *Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\varepsilon_2) = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$ et dont la première coordonnée est égale à 1 .*
8. *Montrer qu'il existe un vecteur ε_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que la matrice de f dans $\mathscr{B}'$ soit $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et dont la première cordonnée est égale à 1 .*

Étude du cas $a \neq 2$.

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, \lambda$ désigne la valeur propre déterminée à la question 3.
On rappelle que U est un vecteur propre de$_a$*, associé à la valeur propre λ.*

9. *Expliquer pourquoi M_a a exactement deux valeurs propres réelles λ et $-a$.*
10. *Déterminer un vecteur propre V de M_a, de première composante égale à 1 , associé à la valeur propre $-a$.*
11. *Déterminer* $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *tel que* $\mathrm{M}_a\ \mathrm{W} = \mathrm{V} - a\ \mathrm{W}$.
12. *Montrer que M_a est semblable à la matrice* $\mathrm{T}_a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+3} = -18u_n + 3u_{n+1} + 4u_{n+2}, \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

13. *Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n.$$
Identifier $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{M}_a$.
14. *Déterminer une matrice trianguaire supérieure T et une matrice P inversible, telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{T}\mathrm{P}^{-1}$.*
15. *En décomposant T sous la forme* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*, calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
16. *Donner l'expression de X_n en fonction de $\mathrm{X}_0,\ \mathrm{T}, \mathrm{P}$ et P^{-1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 0.2 *On considère, sous réserve d'en avoir établi la convergence dans la suite de l'énoncé, la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales impropres définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t.$$

Préliminaire technique

1. *Donner l'expression sur $\mathbb{R}_+^*$ de la dérivée de la fonction :*
$$p : x \longmapsto x \ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan(x).$$
2. *Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.*

Étude d'une intégrale auxiliaire

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{1-\cos(u)}{u^2} \end{array} \right. .$$

On considère par ailleurs, sous réserve d'avoir établi la convergence de l'intégrale impropre intervenant dans cette définition dans la suite de l'énoncé, la fonction

$$\mathrm{L} : x \longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2} \mathrm{e}^{-xu}\, \mathrm{d}u.$$

3. *Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u) \leq \frac{2}{u^2}$.*
4. *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et préciser ce prolongement. Pour la suite, on notera encore f le prolongement de f à $\mathbb{R}_+$.*
5. *En déduire que l'intégrale $\mathrm{L}(0)$ est convergente.*
6. *En déduire que la fonction L est définie sur $\mathbb{R}_+$.*
7. *Montrer que :*
$$\forall u \in \mathbb{R}, 1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}.$$
En déduire que :
$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}.$$
Indication : *on pourra étudier la fonction $h : u \longmapsto \frac{u^2}{2} - 1 + \cos(u)$.*
8. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Déduire des questions précédentes que :*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \mathrm{L}(x) \leq \frac{1}{2x}.$$
Quelle est alors la limite en $+\infty$ de la fonction L ?
9. *On admet que la fonction L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a :*
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{L}''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(u))\mathrm{e}^{-xu}\, \mathrm{d}u$$
Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})u}\, \mathrm{d}u$ pour tout $x > 0$.

   Puis en déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(u)\mathrm{e}^{-xu}\, \mathrm{d}u$ pour tout $x > 0$.

10. *Déterminer alors une expression de* $\mathrm{L}(x)$ *pour tout* $x > 0$*, puis en déduire qu'il existe deux réels* C *et* D *tels que l'on ait :*

$$\forall x > 0,\ \mathrm{L}(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \mathrm{C}x + \mathrm{D}$$

11. *En utilisant la limite de* L *en* $+\infty$*, déterminer les constantes* C *et* D*, puis en déduire la valeur de* $\mathrm{L}(0)$*.*

Étude asymptotique de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour tout entier naturel n*, on considère la fonction* f_n *définie par :*

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n} \end{array}$$

12. *Calculer, pour tout réel positif* x*, l'intégrale* $\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t$*.*
Qu'en déduire pour l'intégrale I_1 *?*
13. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq f_n(t) \leq \tfrac{2}{t^n}.$$

14. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que* f_n *est prolongeable par continuité en 0 , et préciser ce prolongement.*

Pour la suite, on notera encore f_n *le prolongement par continuité de* f_n *à* $\mathbb{R}_+$*.*

15. *Soit* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$*. Montrer que l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ *est convergente.*
16. *Soit* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *et* $\varepsilon > 0$*. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :*

$$\forall x > \varepsilon, \int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{xf_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

17. *Montrer alors que l'intégrale* I_n *est convergente pour tout* $n \in \mathbb{N}, \backslash\{0,1\}$*, puis en exprimer sa valeur en fonction de* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$*.*
18. *À l'aide du changement de variables* $u = t^n$ *dans l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$*, établir que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\ \mathrm{d}u$$

19. *On admet que :* $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\ \mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{L}(0)$*.*

Donner alors un équivalent de I_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*, puis la limite de la suite* $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*