

Programme de khôlle 6

Semaine du 16 octobre 2023

La colle se déroulera en trois temps :

1. Pratique calculatoire(10 minutes)
2. Résolution d'exercices à préparer (15 minutes)
3. Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

1 Pratique calculatoire

Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes.

On rappelle que le nombre complexe j vérifie $j^3 = 1$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -j & j \\ j & -j^2 & 1 \\ -j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}$

2 Résolution d'exercices à préparer

Chaque élève résoudra un des trois exercices :

Exercice 2.1. 1. Soit x, y et z des nombres réels. Calculer le détermi-

nant de la matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.

2. Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-at} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at} dt$$

Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et calculer leur valeur.

Indication : on pourra calculer $I + iJ$.

Exercice 2.2. 1. Soit a un nombre réel strictement positif. Calculer le

déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \ln(a) & \ln(a^2) & -2\ln(a) \\ \ln(\sqrt{a}) & -2\ln(a) & \ln(a^2) \\ -\ln(a^2) & \ln(a) & 2\ln(\sqrt{a}) \end{pmatrix}$

2. Étudier la convergence des intégrales ci-dessous. (i) $\int_1^{+\infty} \frac{(t-1)(t-5)}{t^2(t^2+1)} dt$

(ii) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$

(iii) $\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

Exercice 2.3. 1. Soit x un nombre réel.

Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^a} dt$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que I_a converge.

3 Résolution d'exercices sur le programme de la semaine

Chap.3 : Intégrales : rappels et généralisation

- 1 Rappels sur les intégrales d'une fonction continue sur un segment
- 2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment
- 3 Extension de la notion d'intégrale
- 4 Critères de convergence pour les fonctions positives
- 5 Fonctions intégrables

Chap.4 : Déterminants

- 1 Déterminant d'une matrice carrée
 - 1.1 Définition
 - 1.2 Propriétés

- 2 Calcul de déterminant
 - 2.1 Dimension 2 ou 3

- 2.2 Matrices diagonales ou triangulaires
 - 2.3 Opérations sur les colonnes ou les lignes, méthode du pivot
 - 2.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne
 - 2.5 Un exemple de calcul de déterminant d'ordre n
-
- 3 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme
 - 3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs
 - 3.1.1 Définition
 - 3.1.2 Interprétation géométrique en dimension 2 et 3
 - 3.1.3 Propriétés
 - 3.2 Déterminant d'un endomorphisme